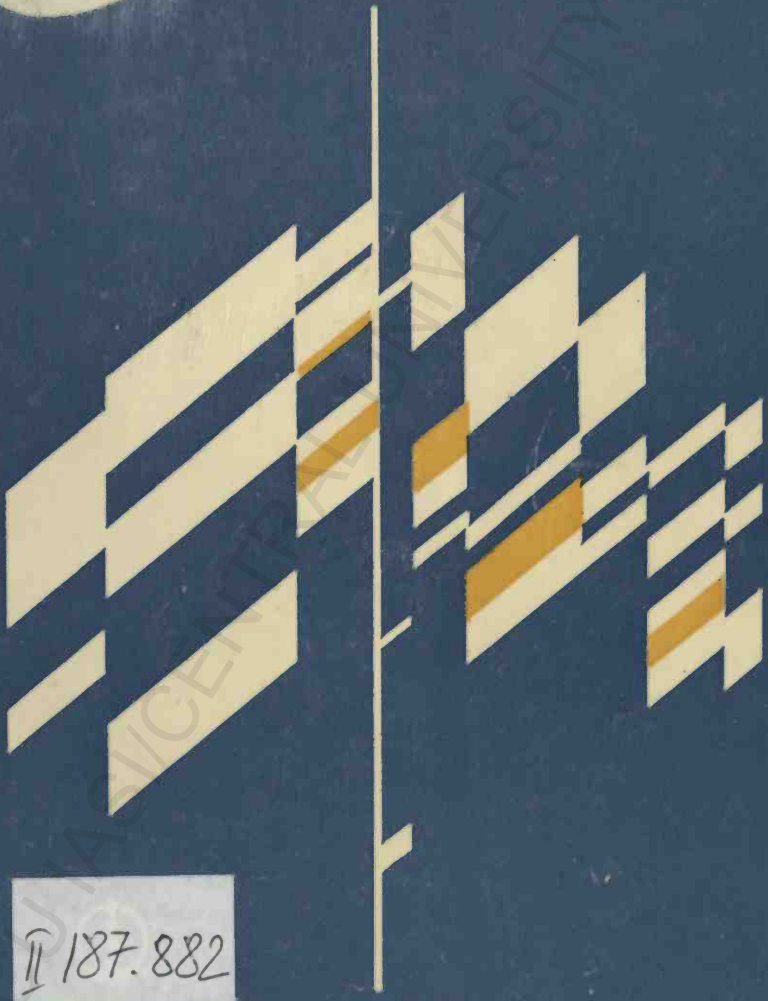
AXIOMATICA

187882

PETRU IOAN



II 187.882

EDITURA ȘTIINȚIFICA ȘI ENCICLOPEDICA

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAȘI
II 187882

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

AXIOMATICA

246101
201972
B.C.U. - IAŞI

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PETRU IOAN

AXIOMATICA

STUDIU MORFO-LOGIC

246101

201972
B.C.U. - IASI

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1980

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Coperta de: SIMONA NICULESCU

25 AUG 1980
— IAȘI —
04-515996

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

„...formalismul este domeniul construcției, iar aceasta îi asigură și eficacitatea și limitele"

JEAN LADRIÈRE

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Introducere: AXIOMATIZAREA CA RELAȚIE

În *Semiotică și negație* P. Botezatu ilustrează convingător aportul euristic al logicii formale în analiza extensională a conceptelor. Examenul se desfășoară în cazul conceptului de *aplicație*, esențial pentru însăși clarificarea statutului epistemic al logicii contemporane, în împrejurarea folosirii frecvente a sintagmelor „aplicație logică" și „logică aplicată". Aflăm, nu fără surprindere, că *aplicabilitatea*, privită ca relație — în domeniul și codomeniul căreia pot figura idei sau acțiuni —, poartă și dimensiuni complementare înțelesului curent, de răsfrîngere practică a unei teorii sau a unui sistem de cunoștințe. Aplicația se desfășoară deopotrivă de la teorie la teorie, de la practică la teorie, sau de la practică la practică. Iar raporturile explicitate — TP, TT, PT și PP — nu sînt decît verigi elementare, interferente în cicluri mai complexe, TPT, PTP etc., relevante pentru cursul dialectic și fertil dintre gînd și realizare, ipoteză și consecințe [1].

În cercetarea pe care o propunem, reconstituim într-o manieră similară conceptul de *axiomatică*. După cum se știe, logica formalistă și matematicile, în demersurile standardizate ale metateoriei, inovează de cîteva decenii travaliul fundațional prin tehnica *deducției naturale* [2]. Promotorii, ca și observatorii din afară, s-au crezut în fața unui procedeu de *sistematizare* și *edificare teoretică* distinct și concurent axiomaticii curente. De unde dualismul metodelor de organizare deductivă a teoriilor formalizate. Detașîndu-ne de acest mod de înțelegere, care rămîne la recunoașterea coexistenței procedeelor de reconstrucție riguros deductivă a teoriilor științifice, vom încerca să arătăm că între „metoda axiomatică" din înțelesul curent și „metoda deducției naturale" raportul nu este de

exterioară concurență, ci mai curînd de emergență, de *generalizare metodologică* și *expansiune teleologică*. Vom denunța caracterul exterior al prezentării formelor *sistematizării deductive*. Corespunzător, vom identifica lacunele și asimetriile conținute în conceptul actual al deducției, ca urmare a discriminării între deducția *axiomatică* și deducția *naturală*. Vrem să credem, astfel, că este pregătit momentul pentru intervenția unui proces de decantare între numeroasele variante ale metodei deductive, a unui examen critic și constructiv, care să ne elibereze de aprehensiunea că în focul construcției am trecut cu vederea problema crucială a valorii.

Investigația ne menține în limitele logicii. Ilustrăm — în capitole deja clasice ale analizei formaliste — un concept unificat al axiomaticii (sistematizării deductive), cu speranța că restrîngerea cîmpului de cercetare va fi compensată de *transparența metodologică* a științei la care ne oprim, de ascendentul pe care și l-a cucerit în impunerea și confirmarea sistemelor deductive. În principiu, cel puțin, axiomatizările logicii sînt destinate să servească științele. Se știe că sistemele ipotetico-deductive și-au făcut apariția în logică odată cu intrarea matematicilor într-un stadiu decisiv al fundamentării. Sub auspiciile *logicismului*, sistemele logico-axiomatice ale lui Frege și Russell-Whitehead veneau să ofere însăși baza edificiului matematic. Corelate programului *formalist*, sistemele logice Hilbert-Ackermann și Hilbert-Bernays au contat, la rîndu-le, ca termen de confruntare în axiomatizarea matematicii. Sistemul axiomatic al lui Heyting, de logică *intuiționistă*, aspira, în replică, la proiecția abstractă a modului de raționare matematică, la ameliorarea căreia aveau să se mai angajeze I. Johansson, autorul unui „calcul minimal", F.C.S. Griss, cu sistemul de logică intuiționistă fără negație, și alții [3]. Ca „una din bazele posibile ale structurii matematicilor" a fost propusă și trilogia axiomatică a lui St. Leśniewski [4], desfășurînd *protothetica* (un calcul cuantificat al propozițiilor cu variabile de functori), *ontologia* (calcul predicațional extins), respectiv *mereologia* (calculul propozițiilor exprimînd relații între parte și întreg). Același angajament epistemologic relevă și axiomatizările din *logica quantică*, jucînd în teoria cu același nume din mecanică rolul geometriilor în teoria

generală a relativității[5]; de asemenea, axiomatizările din *logica deontică*, cu deschideri către științele juridice, etică și praxiologie; apoi, axiomatizările din logica *temporală*, comunicînd cu fizica și dialectica etc.

Relativ la statutul și funcțiile logicii, în tratamentul ei modern, formalist, s-au exprimat poziții extremiste. La timpul său, J. Łukasiewicz afirma că știința în atenție nu este „o investigație asupra formelor gîndirii", că „obiectul ei nu este deloc acela de a cerceta cum gîndim în realitate sau cum ar trebui să o facem". Logica „nu are de-a face cu legile gîndirii mai mult decît ar avea-o matematicile"[6]. Trimițîndu-ne la Kreisel[7], J. Corcoran notează, la rîndu-i, că logicienii „au început să vadă în logica matematică o ramură a matematicilor aplicate care construiește și studiază modele matematice în scopul înțelegerii fenomenelor logice". Din acest punct de vedere, adaugă autorul american, „logicile matematice sînt comparabile cu modelele matematice ale sistemelor solare, ale corzilor vibratorii, sau ale automatelor, din fizica matematică, ori cu modelele matematice ale computerilor din teoria automatelor"[8]. Propria-i întreprindere de restaurare a sistemului silogisticii aristotelice nu vrea să însemne altceva decît construcția unui model matematic[9], adică „un exercițiu științific"[10]. Or, același autor este ținut să reactualizeze, în contextul încercării de formalizare a silogisticii originare, distincția aristotelică dintre *știința axiomatizată* și *logica subiacentă acesteia*. Modelul matematic propus de Corcoran este destinat să susțină ideea că silogistica Stagiritului, ca teorie a deducției, este logica subiacentă — *underlying logic* — a științei axiomatizate pe care o discută prima carte a *Analiticilor secunde*. Ni se atrage atenția, în acest sens, că raportul dintre partea relevantă a *Analiticilor prime*, în care Aristotel expune silogistica în manieră sistematică, și prima carte a *Analiticilor secunde* este aproximativ același cu raportul pe care-l întrețin capitolele 4 și 5 din tratatul lui A. Church[11], dezvoltînd respectiv logica de ordinul întîi și aritmetica axiomatizată ca extensie a logicii de ordinul întîi[12]. Această interpretare este convergentă, dealtfel, punctului de vedere tradițional, exprimat în marginea unui pasaj din *An.pr.* I, 1[13]. Nedumerirea noastră provine din considerarea exclusiv a silogisticii *naturale* ca logică de bază a științei axiomatizate în sensul lui Aristotel. J. Corcoran se situează pe

poziția împărtășită la noi de A. Dumitriu, refuzînd interpretarea silogisticii în termenii unui sistem de legi sau teze logice. Ne putem întreba, în această situație, dacă axiomatica tezială a logicii de ordinul întîi mai poate reprezenta logica subiacentă a aritmeticii, cum păruse să admită autorul american. Invers, ar trebui să ne-ntrebăm cărei științe efective îi asigură silogistica, fie ea și ca sistem al deducției naturale, logica subiacentă? Parafrazînd o dilemă a lui A. Dumitriu [14], vom fi ținuți fie să admitem posibilitatea ca un *sistem formalizat* de logică să reprezinte într-adevăr logica subiacentă a unei științe, de asemenea formalizată, și atunci sistemul logic va îndeplini această funcție indiferent că întruchipează ierarhia *tezelor* sau a *schemelor de inferență*, proprii logicii, unele ca și celelalte; fie, dimpotrivă, să excludem cazul ca un sistem de logică să exprime logica subiacentă a unei științe, și-atunci nici sistemul tezial al logicii predicaționale de ordinul întîi, nici sistemul inferențial al silogisticii nu pot pretinde la această demnitate. După părerea noastră, chiar dacă studiul logicii axiomatizate, în diversitatea variantelor acesteia, nu ne pune automat în fața logicii subiacente celorlalte științe, contribuie hotărîtor la luminarea drumului către aceasta.

Axiomatizarea și *formalizarea* au apropiat progresiv sistemele logicii de axiomatizările altor științe. Un sistem matematic, în speță, revine, ca și sistemul logico-deductiv, la un *limbaj* (simbolism), la o *sintaxă* deductivă, respectiv la o *semantică* interpretativă, un *model* care *reprezintă* teoria deductivă. Cu toate acestea, sistemele axiomatice ale logicii manifestă un avans în planul formalizării, un spor de abstracție, cel puțin o pistă distinctă în generalizarea sub aspectul formei, care le și conferă relevanța de sisteme *logice*, în raport, să spunem, cu formalismele matematice. Axiomele și teoremele sistemelor din științe transpun *legile* respectivelor științe, sînt enunțuri *sintetic-nomologice* [15], pe cînd tezele sistemelor logice exprimă enunțuri *analitic-nomologice*, legi ale legilor științifice (G. Frege). În împrejurarea că pot fi reperate și printre tezele matematice enunțuri tautologice, adevărate în întregul univers al discursului, se cere să deosebim nivelurile și orizonturile tautologicității. Enunțurile tautologice din matematică sînt valabile pentru întregul *parcurs al valorilor* [16] din domeniu, pentru toți indivizii din clasa argu-

mentului, sau pentru toate combinaţiile indivizilor din clasele argumentelor funcţiei sau relaţiei experimate prin enunţurile respective. Enunţurile tautologice ale logicii sînt valabile indiferent de valoarea de adevăr a subenunţurilor componente, indiferent de mesajul informaţional al „atomilor" care alcătuiesc „molecula". Stă în raţiunea de a fi a logicii formale să degaje raporturile dintre enunţuri, spaţiile de joc ale acestora, pe firul exclusiv al valorilor posibile de adevăr, cel puţin în cazul logicii propoziţiilor neanalizate, în contexul căreia a fost propulsată noţiunea de *tautologie* [17]. Oricît de frapantă ar fi analogia enunţurilor :

$$a \cup b = \overline{\bar{a} \cap \bar{b}} \qquad (1)$$

$$p \vee q \equiv \overline{\bar{p} \,\&\, \bar{q}} \qquad (2),$$

primul este un enunţ *atomar* al teoriei mulţimilor, pe cînd al doilea un enunţ *molecular* al logicii propoziţiilor neanalizate. E drept că enunţul (1) aparţine nu numai teoriei matematice a mulţimilor, ci şi logicii propoziţiilor analizate clasial. Se învederează, însă, că adevărul tautologic al enunţurilor matematice se tranşează la nivelul analizei atomare, cîtă vreme tautologiile logicii se revelează în cadrul analizei moleculare a enunţurilor. Raţionamentul algebric :

$$\frac{\begin{array}{l} x > y \\ y > z \end{array}}{x > z} \qquad (3),$$

deşi analog schemei logice de inferenţă :

$$\frac{\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \end{array}}{p \supset r} \qquad (4),$$

îşi estompează analiticitatea matematică dacă-l transcriem sintetic :

$$\frac{\begin{array}{l} s \\ t \end{array}}{v} \qquad (5).$$

La rigoare, tezele sistemelor axiomatice ale logicii nu sînt *axiome* și *teoreme*, ci numai *scheme de axiome și teoreme*. Logica nu sistematizează *demonstrații efective*, ci *scheme ale demonstrațiilor*, cărora am putea să le spunem, prin convenție, *deducții*. Iar dacă termenul din urmă a devenit ambivalent în privința nivelurilor de abstracție la care este atașat, se cere să realizăm translația semantică de rigoare între *deducție* și *derivare*[18]. Avînd în vedere pasul remarcabil întreprins în tehnica formală de către von Neumann, prin considerarea *claselor (schemelor) de axiome*[19], am putea spune că sistemele axiomatice ale logicii validează *scheme ale schemelor de propoziții*. Faptul aruncă o nouă lumină asupra formalismului logic, angajat uneori cu dezinvoltură în obiectivul reducționismului matematic.

În marginea notațiilor de mai sus considerăm dezirabilă confruntarea axiomaticii științelor cu axiomatica logicii sub aspectul „fiziologiei", al construcției și funcționării sistemelor deductive.

Cercetarea pe care o expunem argumentează unitatea formelor axiomaticii prin referințe exprese la mecanismul și substanța demersurilor deductive ale logicii. Aria căutărilor este și-așa destul de vastă pentru aspirantul la un coeficient de originalitate, în planul metodologiei și-al rezultatelor dobîndite. Iar apoi, logica este domeniul privilegiat al experimentului axiomatic, matricea diversificării și paradigma funcționării acestei metode.

În mod obișnuit, *axiomatica* este asimilată cu *deducția tezelor*. Sub auspiciile sistemului deductiv, enunțurile logice ale teoriilor suportă stratificarea în *axiome* și *teoreme*, la procesul fundațional dîndu-și concursul reguli corespunzătoare de deducție. În aceasta noi vedem o îngustare a noțiunii de *sistematizare deductivă*, de felul cantonării conceptului de aplicație la relația teorie-practică. Cel puțin în cadrul logicii, domeniul preferențial al referințelor, axiomatizarea poate exprima un demers metodologic relativ independent de constructele asupra cărora se exercită. Procedăm *axiomatic* ori de cîte ori postulăm (afirmăm necondiționat) ceva, pentru a întemeia sau afirma condiționat altceva. Plecăm de la teze și de la reguli deductive, sau numai de la astfel de reguli, pentru a ajunge la alte teze și la alte reguli, sau numai la

reguli (de deducție, de asemenea). De fiecare dată operăm în perspectiva unui sistem de referință cu două coordonate : *definisabilitatea* termenilor și *deductibilitatea* enunțurilor. Procedăm prin a nu defini totul și a nu dovedi orice, satisfăcînd, în fond, o exigență naturală [20] : ἀνάγκη στῆναι, cum spunea Aristotel, trebuie să te oprești ! [21]. Am putea chiar să ne mirăm că „este suficient atît de puțin pentru a fonda o tehnică — o tehnică mentală — a specificării raționalului" [22]. Oricum, deslușim o *funcție*, meta-teoretică și meta-sistemică, a *axiomatizării* sau *sistematizării deductive*. O funcție :

$$\mathcal{A}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}' \qquad (6),$$

definită pe relația binară :

$$\mathcal{A} \subset \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}' \qquad (7),$$

pentru cazul particular cînd spectrul $\mathfrak{D} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathfrak{D}'$ este univalent [23]. Domeniul $\mathfrak{D}$ (corpul axiomatic) și codomeniul $\mathfrak{D}'$ (corpul teorematic) funcției în atenție exprimă clase ale căror elemente sînt teze (legi) și reguli (de deducție), respectiv numai reguli. În terminologia teoriei clasice a demonstrației deductive, $\mathfrak{D}$ reprezintă mulțimea tezelor, $\mathfrak{D}'$ fundamentul reunit al acestora, iar parcursul $\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$ însumează procedeele aferente demonstrației fiecărei teze dintr-un fundament. Pentru ca relația $\mathcal{A}$, caracteristică funcției propuse, a axiomatizării, să fie univocă, se cere să adăugăm ideea de algoritm al demonstrației axiomatice, care relevă libertatea și pluralismul metodei în atenție.

Deoarece noțiunile noastre de *axiomă* și *teoremă* încalcă uzanțele, extrapolîndu-se de la domeniul tezelor la cel al schemelor deductive, ar fi poate mai convenabil să vorbim de „sistematizare deductivă" și, corespunzător, de „corpul principiilor" și „corpul consecințelor" [24]. Nici pe această cale nu depășim, însă, dualismul accentuat de terminologia actuală între entitățile logicii, teza sau enunțul legic (decis în termenii adevărului *vi formae*) și schema sau regula de deducție, acceptată pe criteriul validității sau corectitudinii. Pe parcurs vom avea prilejul să orientăm efortul de filtrare a demersurilor deductive spre o înțelegere mai elastică a finalităților logicii, în sensul relativizării dihotomiei teoretic / normativ.

Înregistrînd toate asocierile posibile între domeniul și codomeniul funcției meta-logice mai sus introduse, vom reuși să definim prin trăsături esențiale și să organizăm într-un sistem toate formele metodei axiomatice. Realizăm, astfel, o clasificare „mendeleeviană", fiecare variantă dobîndind în cuprinsul tabelului locul care îi determină în mod univoc caracteristicile. În același timp, ajungem la indicarea unor forme oarecum noi, extreme, încă neexaminate, dar cerute de logica internă a tabelului.

Corpul axiomatic (Principii)		*Corpul teorematic (Consecințe)*		*Axiomatizarea (sistematizarea ipotetico-deductivă)*		
Teze	*Reguli*	*Teze*	*Reguli*	*din punct de vedere metodologic*	*din punct de vedere teleologic*	
+	+	+	−	*tezială*	*tezială*	1
+	+	+	+	„	„	2
−	+	+	−	*naturală*	*tezială*	3
−	+	+	+	„	„	4
−	+	−	+	„	*inferențială*	5

8 din cele 16 combinații posibile ale elementelor din domeniul și codomeniul funcției de axiomatizare sînt excluse din tabel întrucît nu angajează reguli de deducție în corpul axiomatic. Alte două combinații rămîn în afară deoarece anulează corpul teorematic (+ + − − și − + − −) și încă una pe motiv că dezechilibrează inutil grupurile în cauză (+ + − +, față de prestația efectivă − + − +, înscrisă de linia 5). Această din urmă combinație va fi reținută, totuși, ca instanță negativă a funcției de axiomatizare, altfel spus, ca disfuncție subzistă reguli deductive, dar grupul teorematic este nul.

Corespunzător celor doi termeni ai relației de axiomatizare, metoda suportă o dublă caracterizare. Aspectul metodologic propriu-zis se concentrează asupra grupului axiomatic al sistemului ipotetico-deductiv. Corpul teorematic va releva, în schimb, aspectul *teleologic*. Se învederează, astfel, și în logică, unitatea dialectică dintre teorie și metodă.

Punctul de rezistență al clasificării întreprinse privește circuitul dintre teze și reguli, respectiv parcursul funcției meta-logice a axiomatizării. În accepția curentă, metoda axiomatică relevă doar ipostazele 1 și 2 din tabel, $\mathcal{T}\ \mathcal{R} - \mathcal{T}$, respectiv $\mathcal{T}\ \mathcal{R} - \mathcal{T}\ (\mathcal{R})$. Pe de altă parte, însăși metoda deducției naturale este invocată în accepția restrictivă a fundamentării tezelor, conform liniilor 3 și 4 din tabel : $\mathcal{R} - \mathcal{T}$, respectiv $\mathcal{R} - \mathcal{T}\ (\mathcal{R})$. Tabloul nostru marchează împrejurarea că aceeași tehnică deductivă, deducția naturală, operează în sisteme ale tezelor, ca și în sisteme ale schemelor de inferență sau deducție.

Concentrînd situațiile axiomatice rămase în discuție, parvenim la caracterizarea matriceală a funcției meta-logice propuse :

Conținutul grupului axiomatic	*Rezultatul deducției axiomatice*	*Forma axiomaticii*	
Teze și Reguli	*Teze (și Reguli)*	*TEZIALĂ*	(I)
Teze și Reguli	*Reguli*	—	(II)
Reguli	*Teze (și Reguli)*	*TEZIALĂ*	(III)
Reguli	*Reguli*	*INFERENȚIALĂ*	(IV)

Funcția *meta-logică* a axiomatizării se dovedește realizabilă în 3 din cele 4 combinații posibile ale elementelor din domeniu și codomeniu (pentru noi, factorii diversificatori ai metodei). Combinatoric, întîlnim același comportament ca și la funcția *logică* a implicației materiale, în matricea căreia :

p	q	$p \supset q$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

spațiul logic și *conținutul* [25] se distribuie după proporția 3 : 1. Analogia se instituie și-n raport cu paradoxele. Sistemul tezelor logice poate fi clădit *cu sau fără aportul unor teze în grupul axiomatic*, tot așa cum adevărul este implicat deopotrivă de adevăr și de fals. Regulile deductive pot clădi *și sisteme de teze și sisteme de reguli*, precum

falsul implică deopotrivă adevărul și falsul. Cît timp, însă, paradoxele implicației, formulate încă de medievali *(verum sequitur ad quodlibet*, respectiv *ex falso sequitur quodlibet)*, subliniază riscurile limbajului formal [26], în orice caz, precauțiile care trebuie să-i însoțească folosirea, paradoxele axiomatizării nu pot fi acceptate ca atare decît sub semnul pozitivității — ca expresii ale unei libertăți metodologice. Din punct de vedere metodologic, axiomatica relevă preeminența regulilor deductive. Teleologic, ea privilegiază tezele.

Sub incidența celui de al doilea criteriu am și conceput, dealtfel, inventarul formelor sistematice ale metodei axiomatice (capitolul II). Cum diversificarea axiomaticii se realizează sub auspiciile formalizării, a trebuit să urmărim mai întîi problematizarea impactului dintre cele două metode (capitolul I). Sensul valorizator al mutațiilor din însăși axiomatica formalistă face obiectul capitolului III, ultimul din lucrare, în completarea căruia formulăm cîteva considerații de încheiere, relativ la alternativele metodei cercetate.

Menționăm că teoria sistemelor axiomatice ca și procedurile de calcul natural sînt abordate astăzi și *din perspectiva semanticii logice.* În această direcție s-au obținut rezultate substanțiale (Kripke, Hintikka, Kanger, von Wright, Hilpinen, Rusza ș.a.) care pun într-o lumină nouă proprietățile meta-sistemice dintr-o întreagă categorie de construcții logice. Metoda sistemelor de modele, teoria lumilor posibile sau teoria structurilor semantice redimensionează însuși tabloul procedurilor de decizie, a cărui tipologie ne ispitește și sperăm să constituie obiectul unui examen complementar al organizării teoriilor logico-formale.

I. FORMELE ISTORICE ALE AXIOMATICII ȘI RĂSFRÎNGERILE ACESTORA ÎN CONCEPTUL ACTUAL AL METODEI

Adevărată suprametodă a științei contemporane, axiomatica poartă cu sine avatarurile idealului de a da curs, în același demers teoretic, și elanului euristic, de cuprindere progresivă a noului, și aspirației la certitudine, prin dispunerea lineară a cunoștințelor, în ordinea unei definisabilități și deductibilități riguroase. În orice caz, ne apare simptomatică stăruința cu care comentatorii aduc în discuție faptul dacă axiomatizarea, în postura impunerii sistemelor formale, este doar un act de reconstrucție a teoriilor științifice, sau, dimpotrivă, participă constructiv la edificarea acestora. Interesează, astfel, dacă tratamentul deductiv împlinit de axiomatică reprezintă numai „elaborarea finală și restrictivă a unei științe încheiate", „privilegiul științei mature deja", ori exprimă „crochiul în același timp retrospectiv și prospectiv al acesteia" [1], „metoda de descoperire, metoda prin excelență" [2]?

Întrebarea sugerează în termenii lui Piaget o alternativă între abordarea științei *retroactiv* și *reflexiv, prospectiv* și *constructiv* [3]. Ispititoare în sine, ea conferă suficiente mobiluri atît examenului istoric, cît și analizei structurale a metodei în atenție. O acceptăm în intenția degajării unui sens al mișcării axiomatice. Efectiv, capitolul va trece în revistă atitudinile de principiu pe care le-a inspirat mutațiile axiomaticii — metoda a cărei sorginte ne întoarce la zorii științei, respectiv la logica și geometria elină.

1. Formalizarea — criteriu istoriografic al axiomaticii

J. Ladrière, autorul clasicei monografii asupra limitelor interne ale formalismelor, are meritul de a fi impus

2—c. 1959

BCU CLUJ LIBRARY

drept criteriu de periodizare și parametru al evoluției axiomaticii *gradul de formalizare*, de înaintare în abstracție [4] și depășire a ambiguității [5]. „*Progresul axiomaticii consistă*, după reputatul filosof al științei, *tocmai în eliminarea crescîndă a intuiției*" [6]. În timp ce axiomatica veche este „o axiomatică *de conținut*, în care se utilizează concepte fundamentale al căror sens este dat în manieră intuitivă și în care se afirmă propoziții considerate ca evidente despre aceste concepte, axiomatica modernă este o axiomatică pură : conceptele pe care le utilizează sînt introduse explicit și definite exclusiv prin relațiile afirmate între ele ; nu se face deloc apel la proprietăți care să nu fie enunțate explicit în axiome și, în fine, acestea nu sînt considerate ca evidente prin ele însele" [7].

În fapt, eliminarea progresivă a intuiției și accederea științelor la această „uniformă obligatorie", cum îi spune Cavaillès axiomaticii, au loc în stadii succesive. În stadiul *intuitiv*, raportat de Ladrière la geometria sistematizată în *Elementele* lui Euclid, conceptele sînt asumate intuitiv, enunțurile fundamentale sînt luate drept evidente, iar procedurile deductive sînt cele ale logicii discursului natural. În stadiul *abstract*, marcat prin definiția axiomatică a grupului, conceptele manifestă o anumită indeterminare, aplicîndu-se la toate obiectele care verifică axiomele. *Axiomatica formală*, ilustrată de sistemul lui Peano pentru aritmetica numerelor naturale, fixează sensul conceptelor fundamentale prin interrelațiile acestora, exprimate în axiome. Acestea din urmă mai sînt formulate, însă, cu ajutorul unor expresii ale limbajului curent. Abia *sistemul formal pur*, cum este cel al logicii propozițiilor din *Principia Mathematica*, va consacra utilizarea limbajului simbolic riguros și va explicita exhaustiv demersurile deductive [8].

Autorul inventarului expus nu are în vedere, bineînțeles, eliminarea totală a intuiției. Sîntem însă avizați că axiomatica în ipostaza formalizării depline se dispensează de *intuiția conținutului* și promovează „intuiția manipulărilor definite asupra unui sistem de semne" [9]. Cît despre indicatorul menționat, *gradul de formalizare*, va ține pasul mai curînd cu notația termenilor și formulelor propoziționale, decît cu sensul acestora. La limită, sistemul va releva un procedeu mecanic pentru a determina dacă un model notațional oarecare este un enunț bine format, o axiomă

sau o demonstrație din sistem [10]. Este de dorit, cel puțin, ca într-un sistem formal regulile *de formare* și regulile *de transformare* să fie astfel definite încît să decidem într-un număr finit de etape dacă un „cuvînt" este o formulă, sau dacă un „șir de cuvinte" exprimă, în limbajul simbolurilor, o demonstrație a unei formule [11]. La o asemenea ținută, *sistemul formal* poate fi convertit într-un *calcul*, printr-un procedeu de tip mecanic [12].

Ulterior periodizării logicianului belgian, J. Vuillemin stabilește trei ipostaze ale ascensiunii științelor, prin axiomatizare, la formal. Mai întîi, *axiomatica materială*, proprie geometriei, dioptricii și catoptricii lui Euclid, staticii lui Arhimede, mecanicii cerești a lui Newton, termodinamicii lui Clausius etc. Este stadiul în care se deosebesc „propozițiile indemonstrabile (imediate)" și teoremele dependente de acestea, iar definițiile sînt explicite. Urmează *axiomatica formală*, relevată, în ordinea logic-progresivă, de cartea a V-a din *Elementele* lui Euclid, de silogistica lui Aristotel, sau de sistemul teoriei mulțimilor propus de Zermelo. Definițiilor explicite li se substituie, acum, definiții implicite, iar sistemul se constituie independent de interpretările sau modelele aferente, devenind o *formă de teorie*. Ca ultim nivel se impune *axiomatica formalistă*, anticipată de logica propozițiilor la stoici și consacrată efectiv sub auspiciile metamatematicii lui Hilbert. Este stadiul care angajează o teorie specială a demonstrației [13].

În ciuda calificării divergente a unor teorii exemplificatoare, clasificările pe care le-am evocat satisfac exigența omogenității criteriului, dar nu pot da nici măsura și nici justificarea *progresului intern* al axiomaticii, în unul și același domeniu al științei. Ele relevă mai curînd modul distinct în care are loc impactul metodei în atenție cu teoriile diverselor științe. Altminteri, cele două clasificări cu rol de periodizare surprind avansul axiomaticii în contextul unui *cuplu metodologic*, organizarea deductivă riguroasă a teoriilor din științe sub incidența limbajelor formalizate. Purtînd analiza mai departe, am putea vorbi și de un trio metodologic, în care *axiomatica* s-ar corela *formalizării* și *simbolizării*. Este poziția lui Rudolf Carnap, după care în *limbajul formalizat* „poate fi stabilit un sistem sintactic de reguli explicite", în timp ce pentru *limbajul*

simbolizat este definitoriu faptul că „pot fi utilizate simboluri artificiale în locul cuvintelor din limbajul natural" [14]. Distincția este întru totul oportună, întrucît formalizarea este asimilată adesea cu simpla punere în formă a unor relații, practic cu schematizarea acestora. În spațiul axiomaticii, însă, simbolizarea va trebui privită doar ca o premisă a formalizării, demers care normează funcționarea limbajului, formarea și transformarea enunțurilor, lucrînd astfel în serviciul efectivității sistemului.

Observațiile pe marginea periodizărilor lui Ladrière și Vuillemin sînt valabile, într-o anumită măsură, inclusiv pentru inventarul sensurilor axiomaticii pe care ni-l propune, mai recent, W. Stegmüller. În fond, și autorul german urmează criteriul formalizării progresive atunci cînd distinge între : sistemul axiomatic *euclidian* ; sistemul axiomatic *în sensul lui Aristotel*, în care propozițiile de existență joacă un rol distinct, iar axiomele sînt detașate de postulate, primele ca propoziții de relații, secundele ca propoziții de construcție ; apoi axiomatica *modernă*, ilustrată în geometrie de către D. Hilbert *(Die Grundlagen der Geometrie*, 1899), în spiritul căreia axiomele sînt promovate ca simple presupuneri despre relațiile reciproce dintre elementele claselor de obiecte considerate, noțiunile fundamentale avînd doar semnificații parțiale, ca „definiții implicite" (M. Schlick) ; la un al patrulea nivel s-ar situa axiomatizarea *informală a teoriei mulțimilor*, cu avantajul că axiomele descriu o structură matematică, iar noțiunea modelului sistemului de axiome poate fi introdusă fără apropierea unei tehnici complicate ; ultimul sens al axiomatizării este descifrat de Stegmüller în legătură cu *sistemul formal al teoriei mulțimilor* [15]. În completarea criteriului formalizării, se mai invocă toleranța interpretării *(Interpretationsspielraum)* manifestată de sistemul deductiv, indice de mare interes în evaluarea propriu-zisă a prefacerilor din tehnica axiomatică.

În principiu, autorii menționați, Ladrière, Vuillemin și Stegmüller, ne-au furnizat punctele de răscruce pe itinerarul axiomaticii. În paragrafele care urmează vom fi atenți la atitudinile inspirate de axiomatica formalistă.

2. Critica devalorizatoare

2.1. Teoria deducției nu poate fi o teorie deductivă... Afirmată cel mai radical în cadrele logicii, atitudinea devalorizatoare merge pînă la contestarea pur și simplu a legitimității axiomatizării. Este poziția împărtășită la noi de către Anton Dumitriu [16]. Reputatul autor pornește de la ideea, confruntată istoric, că logica nu poate fi și *teoria deducției* și *teorie deductivă*. „Logica, ni se spune, trebuie să dea seama de rațiunea oricărei teorii deductive și să-i explice schema ei formală; dar, dacă însăși logica este o știință deductivă (un sistem formal), atunci care este știința deductivă care-i dă rațiunea ei de-a fi și-i justifică structura logică? Ne găsim, dar, în fața următoarei dileme : sau orice sistem formal are nevoie de o justificare logică a schemei lui formale, și logica atunci, ca sistem formal, rămîne fără nici o justificare, sau trebuie să acceptăm sistemul formal al logicii ca satisfăcîndu-se singur, și atunci nu se vede de ce celelalte sisteme formale nu au același drept"[17].

Invocînd tradiția aristotelico-scolastică (logica — știință mai simplă, mai bine cunoscută și anterioară tuturor celorlalte științe, *modus procedendi* al acestora, *organon* și propedeutică), afiliind acestei tradiții pe Wittgenstein [18] și pe Waismann [19], Anton Dumitriu este ținut să afirme că *logica nu este o teorie deductivă*, ea „nu este o știință, ci numai o colecție de reguli de deducție" [20], iar „așa-numitele « legi logice » sau « teoreme logice » nu sînt altceva decît forme de deducție" [21].

În replică la această concepție, atragem atenția asupra următoarelor împrejurări :

1) Paralelismul dintre *legea logică* și *regula de deducție* nu este atît de univoc, pe cît ni se sugerează. Unei legi, de pildă :

$$(p \vee q) \supset (q \vee p), \tag{1}$$

îi pot corespunde mai multe reguli de deducție,

$$\frac{p \vee q}{q \vee p} \quad \text{și} \quad \frac{-(q \vee p)}{-(p \vee q)}. \tag{1' a–b}$$

Reciproc, în aceeași schemă deductivă, fie spre exemplu :

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{(p\&r) \supset (q\,\&r)}, \qquad (2)$$

vom recunoaște disponibilitățile normative ale unor legi logice diferite :

$$p \supset (q \supset ((p\,\&\,r) \supset (q\,\&\,r))), \qquad (2'a)$$

$$(p\,\&\,q) \supset ((p\,\&\,r) \supset (q\,\&\,r)), \qquad (2'b)$$

$$(p \supset q) \supset ((p\,\&\,r) \supset (q\,\&\,r)) \text{ etc.} \qquad (2'c)$$

2) Regulile deductive se lasă analizate de structuri deductive mai complexe, în țesătura cărora figurează legile logice corespunzătoare. Schema inferențială a *silogismului categoric*, spre exemplu,

$$\frac{\begin{array}{l} MaP \\ SaM \end{array}}{SaP} \quad \text{(modul } \textit{Barbara}\text{, fig. I)} \qquad (3)$$

se revelează ca simplă abreviere a unui trio de silogisme ipotetico-categorice [22] :

MaP	premisa majoră ;
$MaP \supset (SaM \supset (MaP\,\&\,SaM))$	lege propozițională ;
$SaM \supset (MaP\,\&\,SaM)$	(3′)
SaM	premisa minoră ;
$MaP\,\&\,SaM$	
$(MaP\,\&\,SaM) \supset SaP$	lege silogistică ;
SaP	concluzie finală.

La rîndu-i, silogismul *ipotetico-categoric*, fie :

$$\frac{\begin{array}{l} p \supset q \\ p \end{array}}{q}, \qquad (4)$$

trădează aceeași structură ascunsă, înglobînd, sub semnul unui autoacord, sub-silogisme ipotetico-categorice :

$$\begin{array}{ll} p \supset q & \text{premisa ipotetică;} \\ \hline (p \supset q) \supset (p \supset ((p \supset q) \& p)) & \text{lege propoziţională;} \\ \hline p \supset ((p \supset q) \& p) & \\ p & \text{premisa categorică;} \qquad (4') \\ \hline (p \supset q) \& p & \text{silogism legic (tot} \\ ((p \supset q) \& p) \supset q & \text{lege propoziţională);} \\ \hline q & \text{concluzie finală.} \end{array}$$

Analiza *infra-structurală* pe care am ilustrat-o invedereazã izomorfismul celor două paradigme inferenţiale, *modus Barbara* şi *modus ponendo-ponens*, relevanţa acestora pentru acelaşi mecanism deductiv :

$$\begin{array}{ll} A & \text{premisă majoră;} \\ \hline A \supset (B \supset (A \& B)) & \\ \hline B \supset (A \& B) & \\ B & \text{premisă minoră;} \qquad (5) \\ \hline A \& B & \\ (A \& B) \supset Z & \text{supra-premisă;} \\ \hline Z & \text{concluzie finală.} \end{array}$$

Cu toate acestea, nu putem rămîne la impresia că sub incidenţa *legii logice* schema deductivă corespunzătoare ar dobîndi un temei definitiv. Autoacordul modului implicativ *ponendo-ponens* se dovedeşte regresiv :

$$\begin{array}{ll} A \supset (B \supset (((A \& B) \supset Z) \supset (A \& B \& ((A \& B) \supset Z)))) & \\ \hline A & \\ \hline B \supset (((A \& B) \supset Z) \supset (A \& B \& ((A \& B) \supset Z))) & \\ B & \qquad (6) \\ \hline ((A \& B) \supset Z) \supset (A \& B \& ((A \& B) \supset Z)) & \\ (A \& B) \supset Z & \text{supra-premisă} \\ \hline A \& B \& ((A \& B) \supset Z) & \\ (A \& B \& ((A \& B) \supset Z)) \supset Z & \text{supra-suprapremisă} \\ \hline Z & \end{array}$$

Împrejurarea este paradoxală. La timpul său, Lewis Carroll o sancționase prin adaptarea aporiei cu Ahile și broasca țestoasă [23].

Fie raționamentul :

Două lucruri egale cu al treilea sînt egale între ele.
Două laturi ale acestui triunghi sînt egale cu a treia.

Laturile în cauză ale acestui triunghi sînt egale între ele.

Simbolizînd cele trei propoziții, obținem schema deductivă :

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}{Z}. \qquad (7)$$

Ca și Ahile, am fi tentați să justificăm inferența de la A și B la Z prin interpunerea unei suprapremise, C, relevînd legea corespunzătoare modului deductiv :

Dacă A și B sînt adevărate, în chip necesar este adevărată și Z.

Or, schema inferențială nou obținută,

$$\frac{\begin{array}{c}A\\B\\C\end{array}}{Z}, \qquad (8)$$

ne conduce la o nouă suprapremisă, D :

Dacă A și B și C sînt adevărate, va fi de asemenea și Z.

Și așa mai departe, fără ca literele vreunui alfabet să ne ajungă, dînd satisfacție broaștei țestoase, care, în această cursă imaginară a forței de persuasiune, nu mai acordă redutabilului concurent nici măcar șansa micșorării handicapului... Dimpotrivă ! Eroul nostru este ținut să însemne premise suplimentare, reformulînd problema și îndepărtîndu-se progresiv de soluția acesteia. Sisif al

condeiului, el va nota succesiv (la noi într-un limbaj exclusiv simbolic, deci mai pronunțat abreviativ !) :

$$
\begin{array}{ll}
 & A \\
 & B \\
(1) & \overline{\qquad} \\
 & Z \\
 & \vdots \\
 & A \\
 & B \\
 & C \text{ (pentru } (A \,\&\, B) \supset Z) \qquad (9) \\
 & D \text{ (pentru } (A \,\&\, B \,\&\, C) \supset Z) \\
 & \vdots \\
 & N \text{ (pentru } (A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D \,\&\, \ldots \,\&\, M) \supset Z) \\
 & \vdots \\
(n) & \overline{\qquad} \\
 & Z \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Cele de mai sus învederează *dualitatea* și *corelativitatea* dintre legea logică și schema deductivă. E greu de înțeles cum ar putea fi explicată reductibilitatea univocă a acestora, pentru a favoriza în consecință una din cele două fețe ale logicii.

3) În plus, nu toate legile logice sînt *tautologii*, în sensul combinatoricii funcțiilor de adevăr. La nivelurile superioare ale analizei logice, cînd sînt considerate expresiile propoziționale care conțin *cuantificatori*, *functori modali*, *funcții de realizare* (temporală, pozițională), *operatori deontici*, *relații* etc., nu mai este atît de simplă convertirea legilor în scheme deductive. Se vădește acum de ce doar logica raporturilor interpropoziționale, numită și a propozițiilor neanalizate, a fost acreditată ca *teorie a deducției*. Pentru teoriile logicii plasate la nivelurile analizei intrapropoziționale, acceptarea enunțurilor legice pe căi neaxiomatice, prin calculul matricelor să spunem, este încă neconcludentă. Pentru logica enunțurilor predicaționale nu există decît metode parțiale de decizie, valabile

pentru clase speciale de formule, iar în cazul logicii modale angajarea matricelor este uneori ilustrativă și suspectată de artificialitate cînd nu este clară problema valorilor aferente constituenților de bază *. În logica deontică se utilizează metoda matricei P-constituenților. Metode matriciale analoage au putut fi construite pentru logicile epistemice, teleologice, praxiologice. Alte tipuri de matrici au fost construite pentru „atitudinile" epistemice, normative sau teleologice elementare în raport cu o descripție de stare dată. Pe de altă parte, au fost propuse metode matriciale pentru sistemele modale complexe cu functori alethici și deontici, deontici și teleologici neiterați etc. În ansamblu, însă, logicile modale, împreună cu topo- și crono-logicile, respectiv cu alte teorii contemporane din știința noastră, s-au născut „gata axiomatizate", parvenind pe parcurs, cu rezultate care diferă valoric de la un domeniu la altul, la alternativa *semantică* de validare a tezelor, în cadrul unor dezvoltări specifice ale teoriei modelelor.

4) Făcînd însă abstracție de considerentele expuse și admițînd că logica ar putea fi cantonată la domeniul schemelor deductive, nu vedem cum și-ar refuza prin aceasta atributele axiomatizabilității. Metoda în atenție este pusă în serviciul definiției și al deducției, mai precis, ea întruchipează sisteme de definiții și deducții [24]. Ca atare, operează deopotrivă în regnul tezelor ca și în sfera schemelor de inferență. Există sisteme logice teziale, în care regulile deductive „produc" scheme de enunțuri din alte scheme de enunțuri, dar și sisteme inferențiale, unde regulile deductive generează noi reguli deductive [25]. Nu metodologic, ci teleologic trebuie fundamentată distincția dintre logica tezelor și logica regulilor.

2.2. Principalele obiecții la adresa axiomaticii formaliste. Respingînd axiomatizările din logică, un critic de prestigiul gînditorului român nu neglijează prezența și rolul activ al metodei în domenii tot mai vaste din științele contemporane. „Această metodă a ajuns indispensabilă în construcția oricărei teorii — concede A. Dumitriu —, deși la început s-a aplicat numai teoriilor pur matematice" [26]. Analiza purtată asupra caracterelor metodei axiomatice relevă, însă, aceeași atitudine depreciativă. „Ne putem acum da seama, conchide autorul român, că demonstrația

în sistemele axiomatice moderne nu are nimic de-a face cu demonstrația științifică (?!) aristotelică" [27], că „metoda axiomatică nu mai examinează structura efectivă a unei teorii deductive, ci numai un schelet mort" [28].

Fără îndoială, atitudinea pe care am evocat-o nu este singulară în logica și filosofia contemporană. Pentru a ne convinge, susținătorii acestei poziții trebuie să demonstreze însă că idealul și modelul aristotelic de știință, din care se inspiră, sînt cele asumate de știința efectivă, a contemporaneității. Nu poate fi evaluată axiomatica actuală decît raportîndu-ne la știința actuală, la mobilurile și funcțiile cu care se recomandă aceasta.

În continuare vom evoca obiecțiile cele mai frecvente la adresa axiomaticii moderne, angajînd deopotrivă logica și celelalte științe intrate în stadiul formalizării. Bineînțeles, în contextul unor rezerve și contraargumente, la care aderăm sau ne reprezintă. Se va înfiripa, astfel, un contur mai adecvat al raportului dintre axiomatica clasică și cea modernă.

2.2.1. **Eliminarea intuiției.** Logicii, care aproape s-a identificat cu metoda axiomatică, ca și dezvoltărilor axiomatice din matematică, adică axiomatizărilor intens formaliste, li se impută cel mai adesea faptul de a fi uzurpat rolul intuiției în desfășurarea teoriilor. Axiomatizarea matematicii videază conținutul specific acestei științe, dar prezervă cel puțin intuițiile logice ale afirmației și negației, ale corectitudinii raționamentelor, ale relațiilor de consecuție între enunțuri, ale consistenței sistemelor etc. În ipostaza formalismului axiomatic, logica se dispensează, însă, chiar și de asemenea intuiții [29]. „Axiomele logicii urmează astfel soarta axiomelor geometrice. Departe de a ni se impune în mod absolut, le punem noi, din contră, după voință" [30]. Nu mai avem de-a face cu logica, ne previne autorul constatării, R. Blanché, ci cu „formalisme logoide" [31]. Prin concursul axiomaticii triumfă, după părerea sa, o concepție cum este cea a lui Wittgenstein, a vacuității legilor logice, reduse la expresia lor simbolică, ca tautologii, adică formule vide de conținut și lipsite de sens, nici adevărate, nici false, ci „întotdeauna adevărate", adevărate potențial, de fapt scheme de propoziții adevărate [32].

Cu toate acestea, autorul francez pe care l-am evocat ne facilitează o observaţie conciliantă. Suspendarea intuiţiei obiectului teoriei, în axiomatica formalistă, este doar provizorie şi fertilă. Prin axiomatizare, intuiţia este supusă unor reduceri fenomenologice, ca să ne exprimăm astfel, în scopul degajării sistemului şi structurii teoriilor. Formalismul axiomatic, odată edificat, va îngădui o *dublă lectură*, una *abstractă*, sintactică, cealaltă *concretă*, semantică [33]. Aceasta din urmă în beneficiul teoriei de origine, cît şi al altora, luate în stăpînire în virtutea izomorfismelor cu aceasta. Axiomatica încurajează deopotrivă *sinonimia sintactică* şi *polisemia semantică*, prezentarea aceleiaşi teorii în sisteme diferite şi reprezentarea aceluiaşi sistem în teorii diferite. În acest context se revelează *forţa euristică* a metodei pe care o judecăm. „În realitate, se pronunţă D. Lacombe, dacă axiomatizarea şi formalizarea pot fi calificate ca «reducţii» logico-matematice, aceasta doar pentru că permit restrîngerea cîmpului obiectelor direct şi explicit *vizate* de teorema matematică. Însă aceste operaţii nu restrîng deloc domeniile la care pot *să se aplice* matematicile... Se produce exact contrariul" [34].

La rigoare, nici intuiţia funcţională, deplînsă în critica axiomaticii moderne, intuiţie care prezidează construcţia teoriei ştiinţifice, nici ea, credem, nu este suspendată. Prin formalizare, „gîndirea revine la suportul ei material, în aşa fel că substituie operării cu abstracţii o operare cu obiecte materiale" [35]. Formalismul însuşi „apare ca un obiect concret căruia i se poate studia structura în manieră abstractă" [36]. Axiomatizarea şi formalizarea se întîlnesc într-o metodă a obiectivării [37]. Graţie, după Ladrière, unei duble proprietăţi a limbajului simbolic: „de a se prezenta, pe de o parte, ca o exterioritate integral accesibilă percepţiei; de a fi capabil, pe de altă parte, să reprezinte demersurile care se înnoadă în planul gîndirii intuitive. El face posibilă astfel o analiză riguroasă a acestor demersuri, dar această analiză nu este decît indirectă: ea nu mai poartă asupra conţinuturilor semnificative care se elaborează în intuiţie, ci asupra reprezentării lor formale, elucidarea sensului devenind investigaţie metateoretică" [38].

Trebuie acceptate, oare, împrejurările menţionate sub semnul răzbunării intuiţiei, sau al vocaţiei formalismului?

Înaintea oricărui răspuns, să avem în vedere că și axiomatica este marca unei procesualități a cunoașterii. Una este ordinea *construcției*, a *invenției* sistemului, ordine teleologică, a căutării fundamentului tezelor propuse, a „derivării" axiomelor din teoreme, a corelării acestora în țesătura unor demonstrații. Alta este ordinea *expunerii, a prezentării* sistemului, ordine strict deductivă, opacă, sau cel puțin discretă pînă la un punct în privința aportului intuiției. Criteriul intuiției se va articula într-un fel la axiomatica elaborată, validată, și altfel la metoda ca atare a axiomatizării, a edificării sistemului riguros deductiv.

Critica axiomaticii în numele intuiției nu este lipsită, dealtfel, de o *justificare psihologică*. După Bourbaki, intervine „rezistența firească a spiritului de a admite că o formă de intuiție diferită de aceea pe care o sugerează datele (și care nu se obține adesea decît printr-o abstracție superioară și uneori dificilă) poate să se dovedească la fel de fecundă, atunci cînd este pusă în fața unei probleme concrete" [39].

2.2.2. **Nonevidența și relativitatea axiomelor.** S-a spus cu fiecare referință la sistematica modernă, formalistă, că axiomele și-au pierdut ordinea naturală cu care se recomandau în sistemele clasice, acea evidență care le revela în ochii Stagiritului ca fiind anterioare și mai bine cunoscute decît enunțurile cu rol de teoreme [40]. „Trecerea la axiomatica formală modifică profund sensul axiomaticii : prioritatea acordată enunțurilor de plecare devine în fapt relativă. Ea nu mai este fondată pe simplicitate sau pe un grad mai mare de evidență, ci doar pe comoditate (funcționalitate, operaționalitate — *n. ns., P. I.*). Alegerea enunțurilor inițiale devine în întregime arbitrară. În principiu, nu mai importă care sistem de enunțuri poate fi luat ca sistem de axiome : singurul lucru care importă este ca să se poată efectiv deduce din ele întreaga teorie" [41]. În locul ordinii naturale, o ordine oarecare [42]. Este ceea ce sancționează „principiul toleranței", formulat de Carnap în numele logicii [43].

Relativ la acest făgaș al întîmpinărilor axiomaticii actuale dorim să contrapunem o singură împrejurare. Că nu poate fi arbitrară instituirea grupului axiomatic în „formulările echivalente" [44] ale unei teorii deductive, atîta timp cît sistemele respective sînt ținute să explici-

teze termenii primitivi și să enunțe propozițiile prime pentru a face definibili toți ceilalți termeni ai teoriei, și demonstrabile toate celelalte propoziții. Hotărîtoare în alegerea axiomelor este *puterea deductivă*, capacitatea acestora de a epuiza sensul operațiilor și al relațiilor care intervin în constituția sistemului.

Dezmințind, poate fără să-și propună, libertatea de axiomatizare la care se face mereu aluzie în critica formalismelor, R. Blanché subliniază că termenii primitivi ai unui sistem n-au alt sens în cadrul acestuia decît cel stipulat prin proprietățile operatorii ale axiomelor [45]. Ca atare, orice modificare a axiomelor teoriei se repercutează în planul eficienței demonstrative și al înțelesului termenilor respectivi. De la sistemul inițial la cel rezultat din modificarea axiomelor, termenii fundamentali ai teoriei sistematizate își pot schimba semnificația, modelele interpretative inițiale pot să nu mai convină. Ni se atrage atenția, ce-i drept, într-un context-limită, că *dreptele* și *planurile euclidiene* nu mai pot fi reprezentate prin *dreptele* și *planurile lobacevskiene*, ori prin cele *riemanniene* [46].

În cazul *logicii* se impune observația similară că *disjuncția, conjuncția, negația* și celelalte conective din sistemul clasic, bi-valent, nu mai au același înțeles în sistemul intuiționist, sau în celelalte sisteme para- și non-clasice, restrictive, extensive ori pe același palier de generalitate cu acesta. Nu trebuie să credem că sistemele geometrice neeuclidiene diferă de cele euclidiene doar prin axioma paralelelor, și nici că logica intuiționistă afectează doar principiul excluderii terțului în gîndirea opuselor, respectiv una din versiunile afirmării prin dubla negare.

În spațiul formalizării, axiomele nu mai sînt acceptate, așa cum se spune, în virtutea altor rațiuni decît cele care justifică restul tezelor dintr-un sistem. Axiomatica nu mai discriminează, într-adevăr, între demnitatea axiomelor și cea a teoremelor. Prioritatea axiomatică a unor teze devine relativă și într-un fel convențională, extrinsecă, pentru că altminteri răspunde unei necesități metodologice [47]. Cu toate acestea, nu este chemată axiomatica în primul rînd să ordoneze și să fundamenteze riguros enunțurile teoriei? Atît timp cît axiomele unui sistem împlinesc cerințele consistenței interne și adecvării la teoria în cauză, *ea însăși la grade diferite de intuitivitate*,

suspectarea axiomaticii de arbitrar trădează ea însăşi o viziune arbitrară asupra metodelor ştiinţei.

Ordinea impusă enunţurilor teoriei prin axiomatica formalistă este una *practică*, aşa cum s-a spus în comentariul metodei, dar axiomatica însăşi nu este subordonată în definitiv unui obiectiv practic — sistematizarea riguroasă a teoriilor ştiinţifice?

2.2.3. **Relativizarea interpretărilor.** Formalizarea a potenţat separaţia dintre sintaxa şi semantica unei teorii. Dedublarea şi, într-o anumită măsură, autonomizarea celor două orizonturi ale demersului fundaţional conduc la împrejurarea tulburătoare că acelaşi sistem acceptă *mai multe modele*, interpretîndu-se în teorii diferite. În axiomatica formală, notează S. C. Kleene, „interpretarea termenilor primitivi, în loc să fie specificată de la început este lăsată nespecificată în deducţiile teoremelor pornind de la axiome. Există toată libertatea, deci, de a alege obiectele pe care le desemnează termenii primitivi, cu grija doar ca ele să verifice axiomele" [48]. Într-un fel, axiomatica formalistă transcende teoria pe care o organizează. Limbajul simbolic ne propulsează în domeniul „calculelor cu semnificaţie vacantă" [49]. Cum aprecia Rougier, teoria pur formală „este o schemă logică, un barem de deducţii efectuate, susceptibile să se aplice obiectelor şi relaţiilor particulare celor mai variate" [50].

De aici, impresia că adecvarea formalismului la un domeniu de fapte, *asumpţia ontologică* [51] a acestuia, nu mai este decît o simplă promisiune, „o întîmplare fericită, fără nici o altă semnificaţie" [52].

Împrejurarea a fost pusă în directă legătură cu abandonarea idealului aristotelic de axiomatică, prin radicalizarea distincţiei dintre *teorie* şi *sistem*. „Construcţia aristotelică a unei teorii — precizează A. Dumitriu — era o organizare piramidală, cu vîrf (principiile) şi o bază (teoremele). Construcţia unui sistem fiind circulară, nu avem de-a face cu un progres al cunoaşterii, ci doar cu o organizare coerentă a propoziţiilor unui domeniu oarecare" [53]. O organizare întrucîtva indiferentă, am adăuga în spiritul observaţiei evocate, convenabilă, eventual, şi altor teorii.

S-a făcut legătură, de asemenea, între tehnicile reducţioniste, afirmate sub auspiciile axiomaticii, şi *nominalism* [54]. Un nominalism de factură metodologică, va concede R. Blanché [55].

În sfîrșit, a fost incriminată o *viziune retorică* și *gramaticală*, care face din obiectul științei produs al activității sintactice și manifestare a autarhiei limbajului [56].

Totuși, dacă am rămîne la aceste constatări ar însemna să judecăm lucrurile după prima impresie, sfidînd cucerirea care asigură eminența metodologică a axiomaticii moderne. Să dăm cuvîntul ca atare și celor care sînt convinși că axiomatica „și-a dovedit mișcarea umblînd" [57], cucerind și fertilizînd domenii din cele mai variate ale științei contemporane.

În concepția grupului Bourbaki, tocmai prin golirea de conținut a sistemelor axiomatice s-a putut da acestora „toată eficacitatea pe care o purtau în sine potențial", aptitudinea „de a primi noi interpretări și de a-și îndeplini integral rolul de generator", de „rezervor de forme abstracte *(structures-mères)*" [58].

„Construirea unui sistem formal — remarcă P. Botezatu — impune o strategie ieșită din comun, putem s-o numim *strategia ignoranței maximale*. Este un pariu: cît de departe putem înainta în dispreţul înțelesurilor, restrîngînd cît mai mult posibil cercul semnificațiilor acceptate originar. Este o disciplină intelectuală severă, dar profitabilă, un experiment mintal inedit și fructuos" [59]. „Cîștigul este că urcăm dintr-un singur loc, dar coborîm în mai multe locuri" [60].

Referindu-se la geometrie, F. Gonseth este de părere că proiecția acestei științe în orizontul axiomaticii moderne i-a aigurat un loc în *teoria obiectelor indiferent de proprietățile care le-ar putea fi atribuite*, teorie chemată să funcționeze ca „fizică a obiectului oarecare", „cartă a libertăților naturale ale spiritului" și „canon al raționamentelor noastre" [61].

Cu axiomatica formală, apreciază Kleene, dobîndim libertatea de a alege obiectele denotate de termenii primitivi, acestora cerîndu-li-se doar o singură condiție: să verifice axiomele, să fie modele ale acestora. Putem asigura acum denotații multiple termenilor primitivi, păstrîndu-ne, totuși, în limitele aceleiași structuri deductive. Interpretarea termenilor primitivi nu este pretinsă în deducerea teoremelor sistemului. Și totuși, axiomaticile formaliste nu sînt niște haine ale nimănui, ca să ne exprimăm astfel. Axiomatica formalistă nu-și justifică rațiunea de a fi decît în măsura în care sistemele deductive pe care le

întruchipează nu sînt vide. Pe de altă parte, am încuraja nihilismul, consideră același autor, dacă am încerca să reprezentăm printr-un singur sistem totalitatea unei științe, în speță matematica [62].

„Constituirea unui sistem formal pornind de la o teorie naivă ar fi un simplu joc, ne previne R. Martin, dacă n-am gîndi la posibilitatea de a arăta că sistemul formal admite una sau mai multe interpretări naive și dacă nu am spera că acest fapt creează un instrument permițînd atingerea unor rezultate inaccesibile (sau dificil accesibile) metodelor naive" [63].

La rîndul său, Jean Piaget se pronunță că orice axiomatică „este (chiar dacă nu apare ca atare la prima vedere) axiomatizarea unui lucru oarecare, adică a unei teorii anterioare (...). Însă, odată declanșată, axiomatizarea își urmează drumul în mod liber, fără a se mai ocupa de teoria-mamă din care s-a născut" [64].

Sancționînd împrejurarea la care ne referim, Jean Ladrière o integrează unui *cerc metodologic al științelor empirico-formale*, condiție mai generală a cunoașterii științifice moderne, dimensionată istoric (în formularea autorului belgian: „construcția teoriilor presupune o precomprehensiune a obiectului și deci o donație originară, dar pe de altă parte obiectul nu este dat decît prin intermediul unei interpretări") [65]. Iar H. N. Lee relevă, în aceeași ordine de idei, un principiu de importanță fundamentală, al *independenței structurii logice de „locus"* (adică de interpretarea sistemului) [65a].

În concluzie, nu poate fi justificată deprecierea unei metode în numele situațiilor-limită în care aceasta ne-ar putea antrena. Ne referim la posibile dezechilibrări între sistem și teorie, sintaxă și semantică, structură și „locus", limbaj și ontologie.

Acceptînd că teoriile se întrupează, prin axiomatizarea modernă formalistă, în „forme abstracte", abordabile separat de orice situație concretă care le fondează [65b], se cere să vedem în aceasta nu păcatul, ci performanța metodei care uneori n-a însemnat decît un factor de imobilizare academică a științei. Să recunoaștem, în traiectul actual al metodei, traducerea idealului husserlian de „teorie a formelor de teorie", de logică în calitate de „ontologie infinită", „doctrină a multiplicității" [66] sau „studiu al tuturor tipurilor de ordine" [66a].

2— c. 1959

În orice caz, polivalența semantică a axiomatizărilor din logică, din matematică și din alte discipline, multitudinea modelelor aferente acestora, total sau numai parțial izomorfe, recomandă axiomatica formală ca instrument de *cunoaștere indirectă* [67], de unificare structurală a științelor [68], de apropiere a teoriilor artificial contrapuse [69] sau de promovare a contactelor interdisciplinare.

2.2.4. **Pluralism logic.** Înaintînd solidar, axiomatizarea și formalizarea par să se facă vinovate de un atentat la adresa tezei unității rațiunii și autorității sale necondiționate. După R. Blanché [70], experimentul dedublării din geometrie se reeditează în logică sub semnul unor grave implicații. Își fac apariția logici „alternative", „la opțiune".

Obiecția atinge axiomatica în măsura în care acompaniază și condiționează mutațiile din însăși substanța teoretică a logicii, concurînd la proliferarea logicilor „para-clasice" și „ne-clasice" propriu-zise [71]. Altminteri, situația nu este deloc scandalizantă.

Din punctul de vedere al autorului citat, *paradoxul pluralismului* ține de o judecată pripită, din afara contextului, a logicilor „non-standard" (R. Ackermann). Ni se atrage atenția, mai întîi, că un *calcul formal* nu este prin el însuși o *logică*, chiar dacă se pretează la interpretări în domeniul logicii. Apoi, alternativele propuse calculului „ortodox" nu ating orizontul *metalingvistic* și *metalogic* în care se situează spiritul creator al acestor sisteme, nu suspendă, prin urmare, logicitatea actului de edificare intelectuală, cea de la care se revendică calculul logicii clasice, bivalente [72].

Din punctul nostru de vedere, unitatea logicii poate fi apărată cu argumente din interiorul calculului formal și-n limitele nivelului epistemic al teoriei standard.

Apreciem că sistemele *polivalente* și *probabiliste*, calculele *intuiționiste*, *mereo-*, *crono-* și *topo-logicile*, formalismele *combinatorii*, calculele *deducției naturale* și celelalte întrupări ale „pluralismului" nu neagă pur și simplu logica, clasică sau ortodoxă, ci nuanțează și complementarizează calculele bivalente, la care, prin tradiție, este redusă aceasta [73].

Solidare ordinii axiomatice, orizonturile noi din logica contemporană îmbogățesc și nuanțează instrumentele

analizei consacrate, diversifică ingredientele formalismului în raport cu un aspect sau altul al fundamentării științei. Ca *organon* și propedeutică a științei, cum a fost recomandată dintru început, logica a trebuit să depășească cadrul formal al enunțurilor „întotdeauna adevărate". Alături de logica adevărurilor preconstituite, s-a înfiripat logica adevărului în constituire, a enunțurilor probabiliste și despre aleatoriu, a propozițiilor actual-nedecise. Faptul că mutațiile pe firul valenței alethice nu introduc vreo ruptură între logica „standard" și sistemele „non-standard" că cele din urmă se-nscriu mai curînd pe linia unei generalizări a analizei tradiționale, l-a încurajat pe un filosof și epistemolog de talia lui M. Bunge să exploreze „o teorie cromatică (multivalentă) a adevărului, combinată cu o logică în-alb-și-negru" [74].

Asistăm la o perfecționare și subtilizare impresionantă a instrumentarului formal în analiza logică. O completare a modalităților alethice („necesar", „posibil" etc.) cu cele deontice („obligatoriu", „permis" etc.), epistemice și doxastice („știu[e verificat] că", „cred[e plauzibil] că" etc.) sau existențiale („universal", „particular" etc.). Un avans de la teoria logică a raporturilor generice (de tip gen/specie) la domeniul raporturilor partitive (întreg/parte), la fel de frecvente ca și primele în gîndirea teoretică și practică. O generalizare a obiectului logicii de la cazul noțiunilor (divizive și colective) la obiecte în genere (procese, fenomene etc.) și de la cazul enunțurilor „individuale" (cu valoare unic determinată) la cele „generice" (adevărate în circumstanțe spațio-temporale); de la enunțuri declarative la interogații, imperative, norme, comenzi etc.; de la discursul teoretic și semnificația locuționară, la discursul practic, respectiv semnificația i- și para-locuționară. O revoluționare a obiectului aceleiași științe, prin formalizarea nu numai a spațiului de joc al descripțiilor de stare, ci și al descripțiilor de transformare sau schimbare.

Toate acestea — marcate prin sporirea considerabilă a constelației de logici (epistemice, doxastice, ale acțiunii și schimbării, ale preferinței și cooperării, apoi teleo-deontice, teleo-praxiologice, deontico-praxiologice, deontico-epistemico-praxiologice etc. etc.) — relevă, credem, nu relativizarea științei în atenție, cît adecvarea mai deplină a acesteia la specificul teoriilor dintr-un domeniu sau altul

al cunoașterii, la țelurile cercetării asumate de acestea. Niciînd teza eminamente dialectică asupra logicii ca *știința formelor gîndirii în raport de conținutul determinat al acesteia* [75] n-a găsit o acoperire mai impresionantă ca în analizele formale contemporane. Pluralismul logic este o realitate a științei noastre, pe care va trebui să ne-o însușim, însă, nu în sensul relativizării și multiplicării teoriilor, ci al *adaptării și nuanțării progresive* a acestora la domeniile și nivelurile cunoașterii și acțiunii, asupra cărora se exercită [76].

Prin axiomatizare și formalizare, logica a dobîndit o demnitate și o funcționalitate fără precedent. „Harta logicii", întocmită de N. Rescher, ne convinge de aceasta prin spațiul larg și relieful variat al dezvoltărilor logice din științe și filosofie. Alături de regiunile „logicii pure" — *logica de bază* (tradițională și modernă) și *metalogica* —, proliferează și cuceresc interesul a tot mai mulți cercetători din domeniul „logicilor speciale" sau „aplicative".

În cadrul *matematicilor* logica se întîlnește cu aritmetica (teoria algoritmilor și a calculabilității, programarea automată etc.), cu algebra (algebrele Boole, teoria laticelor și a altor tipuri de structuri), cu teoria funcțiilor (funcții recursive, lambda-conversiune, combinatori etc.), cu teoria demonstrației, de asemenea cu teoria probabilităților, cu cea a mulțimilor, cu metamatematica însăși. În *fizică*, prezența logicii este relevantă pentru teoria quantelor și teoria modalităților cauzale. În *biologie* sînt notabile dezvoltările axiomatice în stil Woodger și dezvoltările cibernetice. În *științele sociale* răsfrîngerile aplicative ale logicii se exprimă în sistemele normelor, în sistemele evaluării, în teoria argumentării.

Incidența logicii cu *filosofia* sugerează lui Rescher creionarea unei noi metode de investigație — metoda logicii aplicate *(method of applied logic)* [77]. Angajamentele logicii sînt inventariate aici în clase de aplicații: *etice* (logica acțiunii, logica deontică, logica imperativelor și a comenzilor, logica preferinței și alegerii), *metafizice*, *epistemice* etc. [78].

Se poate aprecia că desprinderea logicii de sub controlul filosofiei, marcată radical de curentul formalist-structuralist, a fost de bun augur pentru cooperarea acesteia cu alte științe ca și pentru revitalizarea, în cele din urmă, a analizei filosofice însăși. Pentru a completa sugestiile

comprehensive ale *hărții* lui Rescher, menționăm că însăși *dialectica* este atacată în ultimul timp din perspectiva „metodei generalizate a formalizării și modelării" [79]. B. V. Šešić a fundamentat un sistem de „logica schimbării și dezvoltării" care formalizează și axiomatizează dialectica în ținuta unei teorii a identității dinamice și a negației constructive. D. Dubarle, pe de altă parte, formalizează și axiomatizează dialectica hegeliană, iar cercetările în acest context sînt în plină expansiune [80].

Revenind asupra obiecției, conchidem că-n spatele „pluralismului" se ascunde vocația instrumentală a logicii, ilustrată exemplar sub beneficiul formalizării și, foarte adesea, al axiomatizării formale.

2.2.5. **Obiecția psihologică (pedagogică).** În concepția criticilor metodei în discuție, formalismul axiomatic ar promova structuri rigide, anchilozînd prin aceasta facultățile de invenție, progresul științei.

Împotriva acestei credințe se pronunță autori reprezentînd deopotrivă matematicile, logica, științele naturii și științele sociale.

Din punct de vedere *tehnic*, replică R. Martin, axiomatica formalizată și-a demonstrat fecunditatea, iar din punct de vedere *psihologic* structurile abstracte, pe care le degajă, deschid un univers inedit de intuitivitate [81].

Sub auspiciile axiomaticii formaliste, remarcă J. Dopp, logica, abstractă și ideală, *codifică problemele pentru a decodifica soluțiile acestora* [82]. Cuplul metodologic în atenție funcționează după ceea ce s-ar putea numi „*principiu al cutiei albe*". În întregime controlabil, limbajul simbolic conferă teoriei rigoare și forță euristică.

După Granger, există o complementaritate între structurarea fenomenelor și axiomatizarea structurilor [83]. Departe de a fi ținută să întruchipeze stadiul academic al științelor, axiomatica operează ca *pol motor al unei dialectici* [84], ca instrument al științei născînde [85].

Nimic nu este mai străin de metoda axiomatică, ne asigură și bourbakiștii, decît o concepție statică despre știință: „mai puțin ca oricînd este redusă matematica la un joc pur mecanic de formule izolate, mai mult ca oricînd intuiția domnește ca stăpînă în geneza descoperirilor; dar ea dispune de acum încolo de pîrghii puternice pe care i le furnizează teoria marilor tipuri de structuri, și astfel ea

stăpînește dintr-o singură privire imense teritorii unificate cu ajutorul axiomaticii, domenii unde înainte părea a domina haosul cel mai inform" [86].

Nu vedem, deci, cum ar putea fi pusă expansiunea metodei axiomatice în seama puterii sterilizatoare.

2.2.6. **Autoanihilare?** În măsura în care formalismul apelează, prin însăși tehnica sa, la intuiții, nu se infirmă oare supozițiile inițiale (? !), nu se dovedește oare idealul axiomaticii formale irealizabil? Iată o întrebare care nu scapă criticilor metodei care ne preocupă.

Ipoteza obiecției care decurge de aici, că axiomatica formală nu exclude aportul intuiției, este veridică, tangențial acest fapt a și fost luat în considerație. În funcționarea sa efectivă, axiomatica formalistă suspendă doar intuițiile purtînd asupra semnificației simbolurilor, și-aceasta în chip provizoriu, în limitele demersului sintactic. Formalizarea teoriilor stimulează, în revanșă, genuri noi de intuiții, în cazul cînd acestea sporesc soliditatea construcțiilor, ori obligă la abandonarea unor zone de gîndire tradițională și permit obținerea unor rezultate noi [87]. Se înțelege că asemenea intuiții devin operante în sistemul axiomatic pe măsura dobîndirii unei expresii formale, a traducerii lor în discursul simbolic.

Cît privește obiecția ca atare, ea angajează *idealul* axiomatic și nu axiomatica de toate zilele... Un ideal absolutist, de care metoda a fost legată în comentariul filosofic, epistemologic și metodologic, în speculațiile asupra științei, fie ele și din partea creatorilor, promotori ai axiomaticii.

Putem judeca, însă, o realitate a științei în numele idealurilor despre știință și al unor programe în filosofia științei? Iar dacă a fost îmbrățișat un ideal de axiomatică pan-formalistă, n-a fost el dezavuat cu mijloacele proprii axiomaticii? Ladrière ne previne în acest sens de caracterul intern al limitelor formalismelor [88]. Tot așa, R. Martin conchide că existența unei „teoreme" și nu a unei „antinomii" a lui Gödel constituie mai degrabă succesul decît eșecul axiomaticii formaliste [89].

Parcurgerea principalelor obiecții adresate axiomaticii din stadiul formalizării va surprinde prin tentația unor comentatori de a izola și amplifica dificultățile, paralel cu estomparea contrafețelor favorabile, preponderente,

poate, celor dintîi. Cum am notat, deja, însăşi judecata critică trimite la idealuri şi scopuri care nu sînt obligatorii pentru ştiinţa contemporană. În această circumstanţă am găsit potrivit să numim o asemenea atitudine *devalorizatoare*.

3. Reconcilierea printr-o dialectică valorizatoare

3.1. **Avantaje ale axiomaticii din stadiul formalist.** Întîmpinările logicii şi celorlalte ştiinţe parvenite la axiomatizări formaliste au impulsionat efortul complementar, de clarificare a cuceririlor dobîndite. Unele avantaje ale disputatei metode au şi fost semnalate, pe parcurs, în reversul obiecţiilor evocate. Dovada *devenirii progresive* şi justificarea *dezirabilităţii axiomaticii* în ştiinţă sînt date, după părerea noastră, de aportul crescînd al metodei în organizarea şi propulsarea teoriilor din ce în ce mai diverse şi cuprinzătoare.

Vorbind despre contribuţia axiomaticii formaliste la clarificarea şi rezolvarea controverselor din jurul unor concepte, la fixarea raporturilor interdisciplinare şi la unificarea ştiinţelor, inclusiv la avîntul efectiv al unor domenii ştiinţifice, P. Suppes are prilejul să sistematizeze următoarele virtuţi ale metodei: forţă de *explicitare a sensurilor unor concepte*; *standardizarea procedeelor şi a terminologiei* din analiza conceptuală [de natură să faciliteze însuşirea teoriilor şi comunicarea între discipline]; sporirea *gradului de generalitate şi obiectivitate* al teoriilor ştiinţifice, evidenţierea *izomorfismelor ascunse* [iar pe această cale, depăşirea pînă la un punct a *controverselor şi opoziţiilor* artificiale dintre teorii, precum mecanica ondulatorie şi mecanica discretă, behaviorismul şi cognitivismul din psihologie etc.]; formularea *ipotezelor suficiente* în construcţia teoriilor — factor de obiectivitate şi securitate, prevenind confuziile care înconjoară supoziţiile implicite din organizarea deductivă clasică; *reducerea ipotezelor*, în conformitate cu cerinţa de economicitate şi claritate, a cărei împlinire exprimă gradul de maturitate al unei ştiinţe [90].

Alți autori vorbesc de rolul axiomaticii în *delimitarea precisă*, *sistematizarea* [91] și *prospectarea obiectului științei* [92], de aportul metodei în *verificarea și expunerea controlată* a diverselor teorii [93], în *corijarea intuițiilor* și *risipirea pseudo-evidențelor* [94]. Axiomatica este prezentată inclusiv ca *instrument al abstracției* și al *analizei conceptuale* [95].

Aspirația sistemelor formale la *coerență și adecvare* cu teoriile din care descind, sporul considerabil în *rigoare și precizie* recomandă metoda axiomatică modernă mai curînd ca „ideografie" decît „stenografie" a științei [96]. Incidența ei cu analiza structurală [97] îi deschide un *cîmp progresiv de aplicabilitate*.

Mod al gîndirii operatorie, combinatorie și sistematizatoare, axiomatica delimitează în ultimă instanță un „domeniu de adevăr" caracterizat prin reguli de apartenență stricte și complete [98]. Împreună cu Ladrière am putea vorbi, în spațiul axiomaticii, de o *inteligibilitate formală*, caracterizată prin exactitudine și autocontrol perfect, transparență și absență a oricărui reziduu [99].

În *logică*, metoda axiomatică a înlesnit construcția succesivă a teoriilor, prin transpoziții și extensiuni. S-au impus în stil axiomatic unele capitole inedite, ele însele cu potențial metodologic pentru filosofie și științe. Aici, ca în oricare alt domeniu axiomatica lucrează împotriva a ceea ce N. Rescher numește „parohialism transdisciplinar".

În cazul *matematicii*, axiomatica și-a adjudecat supremația în opera de fundamentare, contribuind la întărirea „rolului conducător" [100] al acestei științe, respectiv la clasificarea și ierarhizarea ramurilor proprii, tot mai numeroase [101]. Antrenînd în fiecare împrejurare cîștiguri în generalitate și inteligibilitate [102], înlesnind degajarea ideilor comune mai multor teorii, ordonîndu-le pe acestea din urmă într-o ierarhie de structuri, metoda axiomatică realizează în matematică o economie de gîndire pe măsura unui „sistem Taylor" [103].

Intervine și aici o diferențiere funcțională a axiomatizărilor. În *geometrie*, axiomatica joacă rolul metodei de variație a obiectului și de construcție a unor noi obiecte. În *aritmetică*, aceeași metodă pune în lumină caracterele structurale ale unui ansamblu de entități. În *teoria mulțimilor*, punerea în formă axiomatică este o elaborare constitutivă, calea descoperirii și impunerii punctelor de ve-

dere asupra domeniului [104]. *Teoria probabilităţilor* ne apare ca o paradigmă pentru intervenţia axiomaticii ca mijloc de introducere şi explicitare a unor concepte, altminteri foarte disputate.

„Am putea fi surprinşi că o metodă atît de îndepărtată de concret se poate aplica valabil şi în *fizică*", se exprimă J. Ullmo, pentru a preciza imediat că aici materia primă de care dispune teoreticianul „este *preadaptată* metodei axiomatice. Căci ea rezultă deja dintr-o cercetare, dintr-o selecţie a fenomenelor, care nu lasă să subziste, în definitiv, decît un ansamblu de relaţii definind parametri (obiectele) şi de parametri verificînd aceste relaţii (legile)" [105]. În completarea acestei aprecieri, vin observaţiile lui Blanché : „O axiomatică rămîne zadarnică dacă nu se construieşte pe o teorie deductivă prealabilă, care ea însăşi n-are valoare ştiinţifică dacă nu organizează un vast ansamblu de legi dobîndite inductiv, în urma unei îndelungi explorări a fenomenelor" [106].

În concepţia ultimului autor citat, evoluţia ştiinţelor este marcată prin succesiunea etapelor : 1) *descriptivă*, 2) *inductivă*, 3) *deductivă* şi 4) *axiomatică*. Fizica vine să ilustreze excelent această succesiune. Prin axiomatizare, ea îşi va proiecta obiectul într-o posibilitate de modele [107], devenind în chip necesar structurală [108]. Se distruge şi în perimetrul acestei ştiinţe prejudecata evidenţei. Axiomatica explicitează raporturile simbolismului cu tehnica experimentală. Aportul metodei se relevă constitutiv în teoriile mai noi, mai abstracte şi mai formale.

Angajată în *ştiinţele omului*, metoda pare să înlăture definitiv prejudecata rolului pur static şi expozitiv, de accesoriu „retoric" şi „estetic" pentru teorii gata constituite. Deschiderea spre nou şi suflul dialectic, putinţa de a inlesni tatonări prealabile sînt coordonate care condiţionează încercările axiomatice din *psihologie*, *lingvistică*, *antropologie*, *economie politică* şi alte discipline, călăuzite de intenţia instaurării şi în acest domeniu al ştiinţelor modelul *ipotetico-deductiv*.

3.2. **Cadrul de referinţă al judecăţii valorizatoare.** În plină expansiune, axiomatica şi-a conturat paradigme şi funcţii diferite chiar şi în cadrul aceleiaşi ştiinţe. Intervenţia ei în tot mai multe domenii ştiinţifice, de la matematică şi logică la economia politică şi antropologie,

consfinţeşte statutul teoretic al disciplinelor respective, acordînd, în acelaşi timp, *impuls euristic*. Prin axiomatizare, întreaga metodă deductivă parvine la un *rol dinamic*, transfigurator.

Cu toate acestea, stăruie o întrebare tulburătoare cu privire la evoluţia viitoare a acestei metode în ştiinţă şi la deznodămîntul conflictului de ansamblu dintre latura experimentală şi cea formală a cercetării ştiinţifice [109]. În termeni mai cuprinzători, aceasta vizează raportul dublu dintre *intuiţie, raţionalitate* şi *formalizare*.

Un răspuns la întrebarea evocată este posibil, credem, de pe acum. Este posibil în măsura în care istoria ştiinţelor ne convinge de avansul *complementar* al metodelor şi dezminte înclinaţia spre ceea ce Lucian Blaga numea „purismul metodei unice".

Spiritului uman i se oferă, în aspiraţia spre inteligibilitate, o alternativă metodologică, ne previne filosoful român. *Cunoaşterea*, se explică acesta, *„poate fi realizată fie printr-o singură metodă (metoda pură şi absolută), fie prin combinarea cu cît mai multe metode (expansiunea metodologică maximă)"* [110].

Pendularea între cele două tendinţe nu afectează, totuşi, procesul dezvoltării ştiinţelor. Cel puţin în cazul ştiinţei de tip galileo-newtonian, constituirea şi evoluţia teoriilor au avut loc „în cadrele unei « suprametode », care cere o maximă expansiune metodologică în limitele unei matematizări posibile. Nu se tinde aici spre înlocuirea diverselor metode prin matematică, ci spre o maximă exploatare a şanselor, ce le oferă orice metodă compatibilă cu matematizarea" [111].

Mutatis mutandis, constatarea lui Blaga este valabilă pentru înţelegerea destinului metodologic al axiomaticii. Se relevă impunerea axiomaticii ca *suprametodă*, în contextul cuplărilor cu formalizarea, simbolizarea, structurarea şi modelarea. Concluzii peremptorii în această privinţă presupun, însă, o retrospectivă unitară a metodelor contemporane, pe cazul concret al fiecărei ştiinţe.

O contribuţie efectivă la soluţionarea problemei fundamentale a axiomaticii, mai sus formulată, este înscrisă în studiul lui Petre Botezatu asupra *valorii deducţiei*. Poziţia autorului în evaluarea axiomaticii moderne este una

dialectic-valorizatoare. Metoda axiomatică nu este judecată doar în sine, ci ca *moment, logico-istoric, în traiectoria mai amplă a organizării deductive*. Verdictul ca atare rezultă dintr-o confruntare lucidă a puterii și limitelor sistematizării împlinite de axiomatica formală. „Acest efort, mărturisește logicianul român, se naște din credința că în metodologie fiecare succes trimite la un eșec, că nu poate exista o reușită absolută". Se pare, ne previne în continuare autorul, „că *obiectivele metodologice nu sînt toate compatibile*, că ele se temperează reciproc, că înaintarea pe o direcție impune retragerea pe altă linie" [112].

Starea de alternativă, pe care o potențează la maximum axiomatizarea formalistă, va fi marcată de Petre Botezatu prin termenul de *antinomie metodologică*, „în înțelesul kantian de prezență simultană a două teze contradictorii ce par să fie egal de justificate" [113].

Sistemul *antinomiilor metodei deductive*, propus de Petre Botezatu ca inventar comprehensiv al faptelor de limitare proprii axiomaticii formaliste [114], vine să surprindă cupluri de tendințe „care de la o anumită treaptă în sus sînt inconciliabile" [115]. Jocul iterativ al cedărilor reciproce între *intuitiv* și *formal* nu reușește să concilieze exigențele *formalizării* cu cerințele *interpretării*, preocupările *sintaxei* cu interesele *semanticii*. Ne împăcăm cu faptul că *simplificarea fundamentului*, prin reducerea numărului de axiome și termeni primitivi, complică *construcția sistemului*, angajînd definiții și demonstrații mai numeroase și mai dificile (antinomia „simplificării", sancționînd „tensiunea dintre economicitatea bazei și facilitatea dezvoltării sistemului" [116]). Sîntem ținuți să constatăm cum *creșterea puterii sistemului*, dată de numărul și întinderea spațiilor teoretice ce îi asigură interpretarea, acționează în dauna *calităților sale metateoretice*, desolidarizînd consistența, completitudinea, decidabilitatea și categoricitatea sistemului [117] (antinomia „puterii" : „relația dintre capacitatea expresivă și demonstrativă a unui sistem și posibilitatea întrunirii unor proprietăți metateoretice dezirabile" [118]). Înțelegem că *purificarea demonstrațiilor*, ca tendință de eliminare a oricăror supoziții intuitive, va afecta *suficiența fundamentului*; mai exact, va fi contracarată de dubla deschidere a sistemului, către *intuiție* și către *practică* [119] (antinomia „purității"). Aflăm, de asemenea, că *exactitatea termenilor* se obține pe seama *idealizării*

obiectelor, referenții acestora (antinomia „exactității", incriminînd transfigurările deductive pentru „situația iritantă de a trata despre altceva decît ceea ce am intenționat" [120]). Sîntem preveniți, apoi, că *abstractizarea structurilor* merge în pas cu *indeterminarea teoriilor* aferente (antinomia „abstractizării" — diminuarea specificității teoriei prin sporirea gradului de generalitate al sistemului [121]).

Alte cinci antinomii decurg expres din aderarea axiomaticii la *formalizare*, indicîndu-ne dificultățile care apar în minuirea limbajelor standardizate. Formalismele axiomatice de-o anumită anvergură, capabile, în speță, să exprime sistemul aritmeticii, nu mai reușesc să complinească *rigurozitatea* și *simplicitatea demonstrațiilor* (antinomia „rigurozității"). Încercarea de *închidere* a sistemului ne constrînge la demersul contrar, al *depășirii* sistemului (antinomia „totalizării"). Avansul pe calea *formalizării* merge în același ritm cu *relativizarea interpretărilor* (antinomia „interpretării" — semnificația metateoremei Löwenheim-Skolem). *Consistența* sistemului va putea fi prezervată, în astfel de formalisme, renunțînd la *completitudinea* sistemului (antinomia „consistenței", transfigurînd unul din rezultatele lui Gödel). Se învederează, de asemenea, că *semantizarea* sistemului se repercutează asupra forței sale de *expresivitate*, înprejurare la fel de paradoxală ca și cea privind totalizarea sistemului [122].

Substratul polarităților enunțate este plasat de Petre Botezatu în *rezistența intuiției la formal*. Metoda deductivă „progresează, cucerește noi domenii și le organizează, dar cîmpul intuitiv nu poate fi epuizat în limbajul formalismelor" [123]. După cum „procedurile recursive nu pot epuiza cîmpul metateoreticului" [124]. În termenii lui Ladrière, este vorba de „o inadecvare ireductibilă între sistem și ceea ce el reprezintă" [125], de o mărginire funciară a gîndirii formale, ca domeniu al efectuabilului, și deci al finitului [126].

Din punctul de vedere al cunoașterii, se va degaja echilibrul instabil dintre *asimilare* și *acomodare* — în sensul conferit de J. Piaget —, transfigurarea teoriei prin formalizare și a sistemului prin interpretare. „Ne mișcăm, relevă Petre Botezatu, între exigențele sintaxei (de asimilare) și cerințele semanticii (de acomodare), cedînd cînd într-o parte, cînd în alta, căutînd să obținem maximum de avantaje în ambele direcții. Adoptăm o strategie *mini-*

max: minimizarea maximului de pierderi în procesul de adecvare a teoriei la obiect" [127].

Spiritul constructiv al judecăţii purtate de Petre Botezatu în *Valoarea deducţiei* este subliniat de raportarea insucceselor axiomaticii formaliste la *ambiţiile extreme* ale unui program pandeductivist de fundamentare a teoriilor ştiinţifice. Altminteri, „limitele deducţiei nu sînt altceva decît o altă faţă a îndrăznelilor deducţiei" [128]. În mod similar, Ladrière considerase limitele sistemelor formale ca „implicit conţinute în proiectul însuşi al formalizării" [129]. Iar Daniel Lacombe încheia un studiu asupra metodologiei matematice cu următoarea constatare: „Este sigur că întrebuinţarea teoriilor axiomatice a condus uneori la abuzuri: « teratologie » inutilă sau generalizare vană. Însă, în toate epocile, şi în toate domeniile, există cercetători care în ciuda dorinţei lor de originalitate nu produc decît opere fără mare interes. Astfel că cele cîteva excese imputabile axiomaticii constituie doar reversul incontestabilelor sale avantaje" [130].

Poziţia autorului român, evocată de noi ca atitudine dialectic-valorizatoare în problema axiomaticii formale, se reclamă de la o înţelegere complementaristă a metodologiei ştiinţifice. După D. Stoianovici, concluziile studiului la care ne-am referit „merg în sensul relativizării avantajelor formalizării, ţinînd seama de obiectivele specifice urmărite într-un caz sau altul în ştiinţă şi filosofie: un grad relativ redus de formalizare a unei teorii poate fi satisfăcător şi chiar mai avantajos pentru anume scopuri decît o formalizare împinsă departe, în timp ce din alte puncte de vedere poate fi edificatoare o formalizare dusă la limită" [131].

3.3. **Concluzii la discuţia criteriului evolutiv.** Am prezentat, cu riscul inevitabil al simplificărilor, luările de poziţie majore în evaluarea axiomaticii. Ele ne permit să înregistrăm un *criteriu intrinsec* al progresului metodei. Înţelegem astfel că avansul pe calea formalizării este împrejurarea şi cadrul saltului efectiv, parcurs de axiomatică prin *înmulţirea şi ameliorarea impresionantă a serviciilor prestate în tot mai multe ştiinţe*. Impulsul spre abstractizare şi generalizare; ordonarea şi sistematizarea riguroasă a conceptelor şi enunţurilor dintr-un domeniu; economicitatea; ierarhizarea teoriilor după forţa dedue-

tivă și puterea lor interpretativă; descoperirea de înrudiri structurale între teorii diferite și realizarea progresivă a unității științei, — iată cîteva funcții menite a decide în balanța progresului axiomaticii.

În completarea criteriului funcțional la care facem aluzie, capitolul următor va degaja mutațiile din mecanismul însuși al deducției. Înțelegem, astfel, să păstrăm demarcația de rigoare între perspectiva *epistemologică* a analizei axiomaticii, reclamînd un orizont tot mai larg de informații și competență într-un grup sau altul de științe, și cea *strict logică*, de parcurgere a prestațiilor metodei în contextul operațiilor de definiție și deducție [132]. Această din urmă perspectivă ne-a și inspirat, dealtfel, cercetarea pe care o expunem.

Ca orice instrument de anvergură în știință, axiomatica a cucerit îndreptățite elogii. Sub imperiul dialecticii cunoașterii, metoda a putut conduce și la profunde dezîluzii. Sînt, însă, de domeniul trecutului pozițiile extreme, entuziasmul nereținut sau contestația radicală a axiomaticii formale. Timpul a îngăduit detașarea de care depinde dreapta apreciere. Și nu este fără importanță faptul că efortul demistificator a emers din interiorul axiomaticii, cu mijloacele formalismului. Întorcîndu-ne la J. Ladrière vom spune că limitele formalizării sînt relative; ele nu denunță sterilitatea metodei, ci îi circumscriu cîmpul de eficacitate [133], recuzînd idealul unei *formalizări totale* [134] și sancționînd ca idee-limită noțiunea unui *sistem total* [135].

Metoda axiomatică nu-și dezvăluie relieful, observa cu pertinență Ferdinand Gonseth, decît în practica edificării axiomatice [136]. S-ar cuveni adăugat că însăși valoarea metodei nu poate fi stabilită decît în raport cu înfăptuirile din știință. Ca orice metodă, axiomatica, în speță cea formalistă, reprezintă *un mijloc* în realizarea scopurilor cunoașterii științifice și în validarea achizițiilor dobîndite. Este impropriu, după opinia noastră, să atribuim idealuri metodei axiomatice și să judecăm prin ele știința axiomatizată.

II. FORME LOGICE ALE METODEI AXIOMATICE

Optînd pentru morfologia axiomatizărilor din logică, sîntem de părere că analiza întreprinsă depăşeşte preocupările intrinseci ale acestei discipline, relevînd unele aspecte majore ale manifestării metodei în cadrul celorlalte ştiinţe. Contribuţia axiomaticii formaliste la *unificarea structurală* a teoriilor ştiinţifice este legată de mecanismul celor două raporturi funcţionale şi genetice dintre sistemele „ipotetico-deductive", *extinderea* şi *transpoziţia*, suplimentarea grupului axiomatic în vederea obţinerii unui nou gen de teoreme, respectiv organizarea sistemică a unei teorii de aceeaşi putere deductivă cu prima, în baza izomorfismului dintre operaţii şi funcţii.

Logica angajează cele două procese în forma lor pură, în trecerea de la analiza propoziţională la analiza clasială (transpoziţia) şi predicaţională (extensiunea). Iar dacă astăzi nu mai poate fi concepută fundamentarea ştiinţelor în manieră *logicistă*, prin continuarea şi complicarea formalismului logic, este de presupus că cele două tipuri de raporturi vor transpare în orice ştiinţă parvenită, ca şi logica, la ţinuta unei ierarhii de teorii şi a unui sistem de sisteme deductive. În acest sens, analiza pe care am întreprins-o asupra diversificării axiomatizărilor din logică ar putea valora ca premisă şi model în metodologia celorlalte ştiinţe deductive. Pe de altă parte, trebuie reţinută împrejurarea că deducţia naturală, ca alternativă la axiomatica curentă, n-a reuşit să îndatoreze nici o altă ştiinţă în afara unor fragmente ale matematicii, logica rămînînd deocamdată terenul celor mai concludente rezultate pentru multiplicarea tehnicilor axiomatizării sau sistematizării deductive.

În *Introducere* am menţionat doi factori cu rol diversificator pentru axiomatica logică. Strict *metodologic*, sistemele aceleiaşi teorii logice se deosebesc după cum angajează în corpul axiomatic teze (enunţuri legice) *şi* reguli (scheme) deductive, ori *numai* reguli. Cum intervenţia regulilor de deducţie[1] este indispensabilă edificării şi funcţionării sistemului axiomatic, diferenţa va fi dată de participarea sau absenţa tezelor în grupul axiomatic. În spiritul conceptului unitar de axiomatizare, am putea numi regulile primitive din sistemul ipotetico-deductiv drept „axiome normative". O asemenea propunere nu poate scandaliza în măsura în care *axioma logică* a putut fi considerată un caz-limită al *regulii deductive*[2]. În lipsa altor expresii, vom vorbi despre *axiomatizarea (deducţia) tezială* şi *axiomatizarea (deducţia) naturală*. Din punct de vedere *teleologic*, se cere să distingem între sistemele care instituie teze (sau teze şi reguli) — le vom numi *sisteme teziale* —, respectiv cele care fundamentează în exclusivitate reguli de deducţie, de aceeaşi categorie cu regulile postulate în grupul axiomatic, sau de specie diferită — le vom spune *sisteme inferenţiale*.

1. Axiomatica tezială

La întrebarea cum putem edifica riguros sistemele diferitelor categorii de teze sau legi logice ne răspund liniile (I) şi (III) din matricea *funcţiei metateoretice de axiomatizare*. Prin reunirea acestora, parvenim la ecuaţia generală a axiomaticii teziale, de natură să înglobeze liniile (1) — (4) ale *tabelului* formelor logice ale metodei axiomatice, propus în *Introducere*:

$$\mathcal{R} \times \mathcal{R}' \times \ldots (\times \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \ldots) = \mathcal{T} + \mathcal{T}' + \ldots (+ \mathcal{R} + \mathcal{R}' + \ldots) \tag{1}$$

Membrul stîng al ecuaţiei metalogice relevă prezenţa obligatorie a regulilor de deducţie în grupul „axiomatic", după cum membrul drept subliniază prioritatea tezelor în grupul teorematic. Este de înţeles că o astfel de formulă se obţine cu preţul unor simplificări, la care ne vom referi

în discuția fiecărui tip în parte de axiomatizare. Va conta, deocamdată, caracterul cuprinzător al ecuației în discuție, posibilitatea de a se verifica în fiecare variantă de sistem logic: propozițional, cuantificațional, clasial, modal, temporal, deontic, erotetic, epistemic etc.

Cea mai cultivată în logică, fiind și singura cu termen de comparație în științe, *axiomatica tezială* se diversifică după două criterii metodologice. Cel principal a fost deja indicat — *natura grupului axiomatic*, relevată prin prezența sau absența tezelor. Al doilea privește *caracterul demonstrațiilor*, comunicarea directă a fiecărei teoreme cu grupul axiomatic în cazul demonstrațiilor *complete*, sau dimpotrivă, reducerea referințelor la grupul axiomatic prin reportarea teoremelor deja demonstrate, ca în cazul demonstrațiilor *incomplete*.

1.1. Axiomatica cu fundament tezial și demonstrații complete. În *teoria sistemelor formale*, stilul unei astfel de axiomatizări este precizat în noțiunea de *sistem logistic*[3], respectiv structura formală $\mathcal{S} = \langle \mathfrak{S}, \mathfrak{F}, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathfrak{R} \rangle$, angajînd: *mulțimea de bază* (a simbolurilor), pe scurt *alfabetul* sistemului; *mulțimea formulelor bine formate*, ca submulțime a mulțimii „cuvintelor" formate cu elementele alfabetului; *mulțimea schemelor de axiome* ($\mathcal{A} = \bigcup_i \mathcal{A}_i$); *mulțimea regulilor primitive de deducție*, ca mulțime de relații $\bigcup_j \mathcal{R}_j$ n_1-are, n_2-are etc., unde $n_1, n_2, \ldots \geqslant 2$; numerotația alfabetului.

Cum natura elementelor mulțimii de bază n-a fost limitată și poate să fie oricare, sistemele logistice întruchipează deopotrivă axiomatica logică și axiomatizările *vi materiae* din științe. Cu precizarea, însă, că-n logică și metamatematică, (aceasta din urmă ca „matematică a metateoriilor"[4]), standardizarea și complicarea progresivă a demersurilor deductive ating performanțe asociate nu de puține ori cu artificialul, cîtă vreme teoriile propriuzise ale diverselor științe, inclusiv din matematici, angajează, în deducerea teoremelor din axiome, recurențe, inducții complete și alte ingrediente ale demonstrației nestandardizate.

1.1.1. Statutul regulilor de substituție în economia formalismului. O primă simplificare comună ecuației axioma-

4 — c. 1959

ticii teziale și definiției sistemului logistic este *considerarea regulilor de substituție ca reguli deductive*. De fapt, asimilarea este anterioară demersului metalogic. Înșiși creatorii și popularizatorii sistemelor axiomatice au introdus sub un singur titlu regulile deductive propriu-zise (de *transformare mediată*) și regulile de substituție, pentru *transformarea imediată* a formulelor, deși acestea din urmă relevă într-o măsură apreciabilă spiritul regulilor de *formare*. Similitudinea la care facem aluzie transpare, de exemplu, în sistemul axiomatic P, de logică propozițională, pentru care Church menționează următoarele două reguli de inferență, respectiv pentru „*modus ponens*" și pentru „substituție" [5]:

Din $(A \supset B)$ *și* A *a se infera* B!

Din A, *dacă* b *este o variabilă, a se infera* $S^b_B A/$!

Dacă epurăm enunțurile celor două reguli de expresiile limbajului natural, ele vor dobîndi, într-adevăr, alura unui singur tip, de reguli de deducție:

$$\frac{\begin{matrix} A \supset B \\ A \end{matrix}}{B}, \text{ respectiv } \frac{A}{S^b_B A/}.$$

Diferența rezidă doar în numărul premiselor, în felul în care diferă, să spunem, inferența silogistică, mediată, de conversiune, ca inferență imediată:

$$\frac{\begin{matrix} M \text{ a } P \\ S \text{ i } M \end{matrix}}{S \text{ i } P,}, \text{ respectiv } \frac{X \text{ e } Y^c}{Y \text{ e } X}.$$

Pentru nivelarea regulilor de transformare a formulelor, și mai relevant este calculul predicatelor, în care apar reguli de inferență *stricto sensu* (de introducere sau eliminare a functorilor și cuantificatorilor) cu un număr diferit de premise. Dispare acum asimetria dintre regulile deductive și regulile de substituție pe temeiul menționat, al

adicităţii relaţiilor respective, întrucît criteriul se dovedeşte intrinsec regulilor deductive însăşi. Pentru exemplificare, oferim în vederea comparării cele patru reguli primitive de inferenţă din sistemul F_2^2 al lui A. Church[7], epurate, de asemenea, de expresiile limbajului natural. Ele sînt, în ordine, regula *modus ponens* (de detaşare sau eliminare a implicaţiei); regula generalizării (de introducere a cuantificatorului de universalitate, „pentru fiecare..”); regula schimbării alfabetice a variabilelor individuale legate; respectiv regula substituţiei pentru variabilele individuale. Adică:

$$\frac{A \supset B}{\dfrac{A}{B}}, \quad \frac{A}{(\forall a)A}, \quad \frac{A}{B = S^N_{S^a_b N/}A/}, \quad \frac{A}{S^a_b A/}.$$

Simplificarea la care ne-am referit concordă cu unele mutaţii din tehnica axiomaticii. Sînt manifeste, de pildă, tendinţele dizolvării pur şi simplu a *regulilor* de substituţie, prin angajarea unor axiome de substituţie. De exemplu, sistemul F^1 al lui Church[8], în care două din cele cinci axiome suplinesc aportul regulilor de substituţie:

$$A \supset (B \supset A);$$

$$(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset (B \supset (A \supset C)));$$

$$(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A);$$

$(A \supset_a B) \supset (A \supset (\forall a)B)$, unde a este o variabilă individuală, fără a fi variabilă liberă a lui A;

$(\forall a)A \supset S^a_b A/$, unde a este o variabilă individuală sau o constantă individuală şi nici o apariţie liberă a lui a în A nu este o parte bine formată a lui A de forma $(\forall b)C$.

Acţiunea regulilor de substituţie, de forma generală:

$$\frac{A}{S_{\cdots}A/},$$

va fi suplinită de regula detaşării implicaţiilor,

$$\frac{\underline{A} \supset S \underset{\cdots}{\cdots} A/}{S \underset{\cdots}{\cdots} A/},$$

angajind în majoră axioma pentru substituţii, iar în minoră o axiomă normală sau o teză demonstrată în cadrul sistemului. În acest caz, întregul sistem va fi clădit pe regula *modus ponens*. Aceasta la prima vedere, întrucît cele două reguli cu rol substitutiv din sistemul lui Church nu reuşesc să acopere toate atribuţiile regulilor curente pentru substituţie. Cum reuşim ca toate substituţiile de care avem nevoie să rezulte din detaşarea doar a două implicaţii? Luîndu-le, împreună cu celelalte trei axiome, în ţinuta unor *scheme* de axiome, adică lăsînd în seama axiomelor cu rol expres substitutiv doar acţiunea regulilor de substituţie specifice domeniului în care se realizează extensia calculului propoziţional.

În cazul sistemului lui Church la care ne referim, axiomele cu rol substitutiv expres travestesc regulile de substituţie ale calculului predicaţional. Altminteri, ca scheme de axiome, reprezintă ele înseşi *clase infinite de axiome*. În acord cu una dintre ele, putem introduce instanţa de bază:

$$(p \supset_x F(x)) \supset (p \supset (\forall x)\, F(x)),$$

în transcriere curentă:

$$(\forall x)(p \supset F(x)) \supset (p \supset (\forall x)F(x)),$$

ca şi instanţele oarecare:

$$(G(x) \supset_y H\,(y)) \supset (G(x) \supset (\forall y)H(y)),$$

$$(F(x) \supset_y (G(y,z) \supset_z H\,(z))) \supset (F(x) \supset (G(y,z) \supset_{yz} H(z))$$

etc., după cum putem refuza dreptul de instanţă, şi deci de axiomă, unui enunţ care infirmă condiţia ataşată schemei noastre de axiome, precum e cel care urmează:

$$(F(x) \supset_x G\,(x)) \supset (F(x) \supset (\forall x)G(x)).$$

A doua axiomă de substituție a sistemului lui Church îngăduie introducerea în cursul demonstrațiilor a instanței de bază:

$$(\forall x)\ F(x) \supset F(y),$$

ca și a instanțelor oarecare:

$$(F(x) \supset_x (\forall y)G(y)) \supset (F(y) \supset (\forall y)G(y)),$$

$$(F(x) \supset_x (\forall x)G(x)) \supset (F(y) \supset (\forall x)G(x)),$$

$$(F(x,y) \supset_x (\forall z)G(x,z)) \supset (F(y,y) \supset (\forall z)G(y,z))$$

etc., dar nu și a enunțurilor contravenionte condițiilor atașate axiomei, spre exemplu:

$$(\forall x)(\forall y)F(x,y) \supset (\forall y)\ F(y,y),$$

$$(F(x) \supset_x (\forall y)G(x,y)) \supset (F(y) \supset (\forall y)G(y,y))^{9} \text{ etc.}$$

Dacă, prin intermediul variabilelor sintactice, fiecare schemă de axiomă reprezintă o clasă infinită de axiome, adică este o formă care se interpretează în axiome efective, și dacă sistemul este dotat cu scheme de inferență, urmează că vom parveni la *scheme de teoreme*, la teoreme sintactice *asupra sistemului însuși*[10], împrejurare semnificativă pentru evoluția axiomaticii formalizate.

1.1.2. Condiția definițiilor din formalismele deductive. Ecuația axiomaticii teziale și corelatul ei, definiția structurală a sistemului logistic, mai recurg și la o altă simplificare. Ne referim la *estomparea definițiilor*, angajate în tehnica curentă a axiomatizării pentru introducerea unor functori și cuantori. Se învederează ca atare posibilitatea plasării definițiilor printre ingredienții fundamentali ai grupului axiomatic.

În *Principia Mathematica*, unde substituția însăși rămîne în seama demersurilor nenormate[11], definițiile nu sînt considerate ca entități efective ale sistemului deductiv la care sînt atașate, ci ca simple alternative în simbolizarea entităților din sistem. În principiu, toate simbolu-

rile definite sînt superflue, fiind angajate din „comoditate tipografică" (B. Russell). Tezele:

$$(p \supset q) \supset (\sim p \vee q),$$

$$(\sim p \vee q) \supset (\sim p \vee q),$$

$$\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)$$

nu ar valora, deci, decît ca moduri diferite de transcriere a aceleiași formule. Tot așa după cum regula care ne conduce de la una la alta nu ar fi o regulă de inferență, ci una *de traducere* (Prior)[12], iar locul ei ar trebui fixat, în consecință, printre regulile de formare.

Să presupunem, atunci, *axiome definiționale*, de forma $A =_{df.} B$, sau în postura $A \supset B$ ($A \equiv B$)? Cu asemenea axiome s-ar crea posibilitatea unor detașări conform regulii *modus ponens*:

$$\frac{A =_{df.} B \quad A}{B}, \quad \frac{A \supset B \quad A}{B}, \quad \frac{A \equiv B \quad A}{B}.$$

În spatele unor asemenea demersuri, mai mult sau mai puțin explicite, Russell și Whitehead nu văd decît legea identității și acțiunea ei tautologică[13]:

$$\frac{A \equiv A \quad A}{A}.$$

Nu toate sistemele rezervă, însă, printre teze, legea identității. Prior ne dă ca exemplu sistemul cu o singură axiomă:

1. *EEsEppEEsEppEEpqEErqEpr*[14],

din care nu s-ar putea deduce teoreme decît prin aplicarea regulii de substituție. Pentru a face operabil *modus ponens* este necesară: introducerea simbolului *V*, prin definiție:

$$Vp = Epp,$$

relație care acceptă ca însăși traducerea prin echivalență:

2. *EVpEpp*,

sau asumarea, tot ca axiomă secundă, a legii identității, în formula echivalențială:

2'. *Epp*.

Într-un caz ca și în celălalt devine demonstrabil enunțul 3:

3. *EEpqEErqEpr*[15],

iar cu baza astfel obținută poate fi clădită logica formulelor pur echivalențiale[16].

O analiză pătrunzătoare a mecanismului definiției în tehnica formală și a promovării ei prin operatorul de echivalență a fost inițiată, în școala poloneză, de St. Leśniewski. Autorul *protothetic*ii[17] pornea de la observația surprinzătoare că reducerea functorilor propoziționali de către Sheffer și Nicod[18] nu antrenează doar un singur functor primitiv, cum au crezut aceștia, primul indicînd anticonjuncția (incompatibilitatea: *nu și..și..*), iar celălalt antidisjuncția (rejecția: *nici..nici..*), ci doi functori, chiar dacă al doilea, functorul „=" al definiției, nu aparține aceleiași categorii cu primul. Ca atare, sistemul axiomatic construit de Nicod cu functorul „/", al incompatibilității, și cu axiomă unică,

$$(p/(q/r))/(((t/(t/t))/((s/q)/((p/s)/(p/s))))),$$

nu angajează doar *regula detașării pentru incompatibilitate*,

$$\frac{A/(B/C) \qquad A}{C},$$

ci și *regula substituirii mutuale a definiendumului cu definiția sa*, regulă asociată functorului „=".

În raport de Sheffer sau Nicod, Leśniewski, Tarski, Sobociński ş.a. vor realiza noi performanţe în reducerea functorilor logici, prin asimilarea functorului de definiţie cu *echivalenţa logică* şi plasarea acesteia printre noţiunile primitive ale *prototheticii* (logicii propoziţiilor cu cuantificatori şi variabile de functori). De fapt, cu *echivalenţa* şi *cuantorul de universalitate* aplicat propoziţiilor s-a reuşit traducerea tuturor functorilor interpropoziţionali („de adevăr" sau „alethici"):

1. Df. $C(\supset) : E((\forall p)p)O$;
2. Df. $N(\sim) : (\forall p)\, E(Ep(\forall u)u)Np$;
3. Df. $K(\&) : (\forall pq)\, E((\forall \delta)Ep(E\delta(p)\delta(q)))Kpq$ (Tarski, 1923);
   $(\forall pq)\, E((\forall \delta)E\delta(p,q)\delta(q,Epq))Kpq$ (Sobociński, 1939);
4. $Jpq = NEpq = \ldots$;
5. $Cpq = EpKpq = \ldots$;
6. $Apq = CNpq = \ldots$; etc.[19]

Se înţelege că acum definiţiile nu răspund doar unei comodităţi tipografice iar *definiendumul* nu mai este o abreviere oarecare a *definiendusului*. Prin variabila de functor, δ, se conferă *definiendumului* un *definiens* plural. Sîntem în faţa unor *scheme de definiţie*, exprimate în acelaşi limbaj cu tezele sistemului. De fapt, ele apar ca axiome adiţionale, răsturnînd concepţia din *Principia Mathematica*.

În logica contemporană poate fi surprinsă şi o a treia poziţie relativ la structura şi funcţionalitatea definiţiilor. A. Church este pentru autonomizarea operatorului de definiţie. În sistemul P_1 de logică propoziţională, propus de autorul american, sînt introduse pe baza implicaţiei ($\supset$), constantei de falsitate (f) şi operatorului „stă pentru" ($\rightarrow$) următoarele definiţii:

Df.1. $t \rightarrow (f \supset f)$;
Df.2. $\sim A \rightarrow (A \supset f)$;
Df.3. $(A \not\subset B) \rightarrow \sim(B \supset A)$;
Df.4. $(A \vee B) \rightarrow ((A \supset B) \supset B)$;
Df.5. $(A \,\&\, B) \rightarrow ((A \not\subset B) \not\subset B)$;
Df.6. $(A \equiv B) \rightarrow (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$;
Df.7. $(A \not\equiv B) \rightarrow (A \not\supset B) \vee (B \not\supset A)$;
Df.8. $(A \subset B) \rightarrow (B \supset A)$;
Df.9. $(A \not\supset B) \rightarrow (B \not\subset A)$;
Df.10. $\sim(A \vee B) \rightarrow (\sim A \,\&\, \sim B)$[20];

Church nu precizează statutul acestor enunţuri în cadrul sistemului axiomatic, dar semnul definisabilităţii pare să sugereze căderea lor sub incidenţa regulii de detaşare, ca şi eventualele metamorfoze prin aplicarea regulii de substituţie sau prin considerarea lor ca scheme de definiţii.

Punctele de vedere pe care le-am putut degaja conduc la concluzia că structura şi rolul definiţiilor în cadrul sistemului axiomatic nu le separă de *teze* şi *reguli**. În principiu, le putem considera ca axiome adiţionale, supuse regulii de detaşare *modus ponens* (pentru $\supset$, $\equiv$, $=$, $\rightarrow$, după cum le exprimăm). Tot ca axiome adiţionale, definiţiile mai pot alimenta şi regula derivată a substituţiei echivalentelor (regula înlocuirii).

Acelaşi efect îl putem obţine şi prin introducerea definiţiilor ca scheme de *inferenţă imediată*. Am avea, comparativ:

$$\frac{\begin{matrix} - - - \\ - - - \end{matrix}}{\cdot\ \cdot\ \cdot}\ \text{df.}\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \quad \text{respectiv} \quad \frac{- - -}{\cdot\ \cdot\ \cdot}\ \text{df.}$$

Posibilitatea la care ne referim a fost explicitată în *logica operatorie naturală* [21] şi reprezintă modalitatea unică de promovare a definiţiilor într-o axiomatică inferenţială care se vrea riguroasă.

1.1.3. Criterii tipologice pentru reguli şi teze. Oprindu-ne acum la entităţile fundamentale ale grupului axiomatic, vom putea considera ca factor de variaţie în mulţimea *regulilor primitive* gradul de adicitate ori natura ca atare a relaţiei de inferenţă. În primul caz se disting schemele de inferenţă *imediată* (ca reguli *unare*, cu o singură premisă, iar la limită înseşi schemele de axiome, ca reguli fără nici o premisă)[22] şi schemele de inferenţă *mediată* (regulile *binare* fiind cele mai uzuale). În al doilea caz, vor fi departajate regulile deductive *stricto sensu*, regulile de definiţie şi regulile de substituţie. Pentru raportarea şi integrarea sistemelor, va conta, de asemenea, natura formulelor între care se creează situaţia inferenţială, luind în considerare, în acest caz, clasa regulilor propoziţionale, clasiale, predicaţionale, silogistice etc.

În privinţa denivelării *tezelor logice*, trebuie să răspundem unui principiu de *ierarhizare a nivelurilor analizei*

logice. În cazul logicii propoziţiilor neanalizate, al logicii propoziţionale modale, al prototheticii etc., există o omogenitate, de structură şi nivel al analizei, între axiome şi teoreme. Axiomatizările din aceste domenii relevă ecuaţia cea mai simplă,

$$\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}' \times .. \times \mathfrak{T} = \mathfrak{T}(+\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' + ..).$$

Într-o ierarhie a tipurilor de axiomatizare, le-ar urma sistemele *simplu-extensive*. Exemplul clasic este furnizat de sistemele predicaţionale : din teze propoziţionale şi predicaţionale, acestea derivă alte teze predicaţionale, după ecuaţia sistemică :

$$\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}' \times .. \times \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'(+\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' + ..).$$

Între grupul axiomatic şi grupul teorematic se creează acum o asimetrie pe linia omogenităţii tipologice a tezelor. De asemenea, în interiorul grupului axiomatic, pe linia ponderii pe care o deţine fiecare tip de teze. Iată distribuţia axiomelor în sistemul predicaţional Hilbert-Ackermann[23] :

Axiome $\mathfrak{T}$:	Axiome $\mathfrak{T}'$:
(I) $X \vee X \supset X$;	(V) $(\forall x)F(x) \supset F(y)$;
(II) $X \supset X \vee Y$;	(VI) $F(y) \supset (\exists x)F(x)$.
(III) $X \vee Y \supset Y \vee X$;	
(IV) $(X \supset Y) \supset (Z \vee X \supset Z \vee Y)$;	

Din aceeaşi categorie, a sistemelor axiomatice simplu-extensive, mai putem cita *ontologia* lui Leśniewski, clădită pe sistemul *prototheticii* (al logicii propoziţiilor cuantificate) :

Axiome $\mathfrak{T}$:

I. $\forall pqEEpq\forall\delta E\delta(p,\delta(p,\forall uu))\forall rE\delta(q,r)Eqp$ (Sobociński, 1954);

Axiome $\mathfrak{T}'$:

II. $\forall abE\varepsilon abKEc\varepsilon caK\forall cdCK\varepsilon ca\varepsilon da\varepsilon cd\forall cC\varepsilon ca\varepsilon cb$ (Leśniewski, 1920);

sau $\forall abE\varepsilon abKEcK\varepsilon ca\varepsilon cb\forall cdCK\varepsilon ca\varepsilon da\varepsilon cd$ (Leśniewski, 1921);

sau $\forall abE\varepsilon abKEcK\varepsilon ca\varepsilon cb\forall cC\varepsilon ca\varepsilon ac$ (Sobociński, 1929);
sau $\forall abC\varepsilon abEc\varepsilon ca$;
III. $\forall abcCK\varepsilon ab\varepsilon ca\varepsilon cb$ (Sobociński, 1929);
sau $\forall abE\varepsilon abEcK\varepsilon ac\varepsilon cb$ (Leśniewski, 1929);
sau $\forall aUaa$ (Lejewski, 1960)[24].

Într-o a treia clasă de axiomatizări am putea aduna sistemele *dublu-extensive*, de forma:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times .. \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \mathcal{T}'' = \mathcal{T}' + \mathcal{T}'' (+\mathcal{A} + \mathcal{A}' + ..).$$

Un exemplu ni-l oferă silogistica tezială:

Teze $\mathcal{T}$:	Teze $\mathcal{T}'$:	Teze $\mathcal{T}''$:
$CpCqp$;	Aaa;	$CAbeCIbaIac$;
$CCqrCCpqCpr$;	Iaa;	$CKAbcAabAac$;
$CCNppp$; etc.	$CIabIba$; etc.	$CKIcbAbaIac$; etc.[25]

În limitele aceleiași teorii logice, sporirea grupului axiomatic se reflectă în lărgirea corpului teorematic. Axiome și reguli adiționale conduc la teoreme adiționale. De la logica *pozitivă a implicației pure* ne extindem în logica *absolută* (fără negație), de aici în logica *minimală*, aceasta se integrează în logica *intuiționistă*, iar printr-o ultimă extensie parvenim la logica *clasică* (a propozițiilor neanalizate)[26].

În schimb, extensiunile *interteoretice* la care ne-am referit prin exemplele de mai sus par să-și concentreze actul extensiv asupra grupului axiomatic. Procesul demonstrativ, obiectivat progresiv în corpul teorematic, se desfășoară pe cont propriu, obținîndu-se cu mijloacele noului sistem teoremele sistemului de origine (tezele propoziționale, de pildă, în cadrul logicii predicatelor). Pe de altă parte, vom observa că axiomele și regulile reportate din sistemul generator cad acum sub incidența regulilor adiționale de substituție, de introducere a unor noi tipuri de funcții etc., astfel că nu mai operează în aceleași condiții ca în sistemul inițial, ci prin sporirea și reorientarea forței lor demonstrative.

1.1.4. **Ilustrația mecanismului deductiv.** Pentru înțelegerea mecanismului demonstrației în axiomatica cu fundament tezial și demonstrații complete, ne vom opri la

sistemul clasic al logicii propoziționale propus de Hilbert și Ackermann [27]. Vom reconstitui drumul cel mai scurt dintre grupul axiomatic al sistemului respectiv și un enunț oarecare din grupul teorematic. Pentru motive de comparație a procedurilor axiomatice, alegem teorema cu numărul de ordine 14, prezentă cu titlu de axiomă în sistemul din *Principia Mathematica*. Un enunț logico-formal dealtfel ușor de intuit, exprimînd proprietatea de asociativitate și comutativitate a disjuncției, $p \vee (q \vee r) \supset \supset q \vee (p \vee r)$ [28].

Axiomele sistemului au fost transcrise, deja, ca bază pentru extensiunea predicațională a logicii propozițiilor. Le vom utiliza în simbolismul p, q, r. În cursul demonstrației vor interveni toate cele trei reguli primitive ale sistemului, de *substituție*, de detașare a implicației prin *modus ponens* și de *definiție* a implicației :

$$\frac{X_{p,q,r,\ldots}}{X^{p,q,r,\ldots}_{P,Q,R,\ldots}}\ (\mathrm{S});\quad \frac{\begin{matrix}p \supset q\\ p\end{matrix}}{q}\ (\mathrm{M.P.});\quad \frac{\bar{p} \vee q}{p \supset q}\ (\mathrm{D}).$$

La rigoare, (D) va trebui privită ca o meta-regulă, întrucît se exercită inclusiv asupra celorlalte reguli [29]. După cum și regula substituției se conjugă mai de fiecare dată cu acțiunea regulilor (D) și (M.P.). Pentru simplificarea notației, în textul demonstrativ care urmează vom omite simbolul disjuncției dintre termenii unei formule. Bara negației ne va dispensa de eventualele paranteze pentru formula asupra căreia se aplică. Conform uzanțelor, vom indica în dreptul fiecărei teze axioma din care provine prin substituție sau prin definiție, respectiv tezele din care rezultă în urma aplicării regulii de detașare a implicației. Regulile aplicate vor fi marcate în dreptul barelor orizontale de deducție :

1. $((pr)q \supset q(pr)) \supset (\overline{pr}((pr)q) \supset \overline{pr}(q(pr)))$ (IV)
2. $(pr)q \supset q(pr)$ (III)
3. $\overline{pr}((pr)q) \supset \overline{pr}(q(pr))$ (1,2) (M.P.)
4. $(pr \supset (pr)q) \supset (pr \supset q(pr))$ (3) (D)
5. $pr \supset (pr)q$ (II)
6. $pr \supset q(pr)$ (4,5) (M.P.)

7. $(pr \supset q(pr)) \supset (\bar{p}(pr) \supset \bar{p}(q(pr)))$ (IV)
8. $\bar{p}(pr) \supset \bar{p}(q(pr))$ (7,6) (M.P.)
9. $(p \supset pr) \supset (p \supset q(pr))$ (8) (D)
10. $p \supset pr$ (II)
11. $p \supset q(pr)$ (9,10) (M.P.)
12. $(p \supset q(pr) \supset ((q(pr))p \supset (q(pr)) (q(pr)))$ (IV)
13. $(q(pr))p \supset (q(pr))\ (q(pr))$ (12,11) (M.P.)
14. $((q(pr))\ (q(pr)) \supset q(pr)) \supset ((q(pr))\ p((q(pr))\ (q(pr))) \supset$
$\supset ((q(pr))\ p(q(pr))))$ (IV)
15. $(q(pr))(q(pr)) \supset q(pr)$ (I) (M.P.)
16. $(q(pr))p(q(pr))\ (q(pr))) \supset (q(pr))p(q(pr))$ (14,15) (D)
17. $(q(pr))p \supset (q(pr))(q(pr))) \supset ((q(pr))p \supset q(pr))$ (16) (M.P.)
18. $(q(pr))p \supset q(pr)$ (17,13)
19. $((q(pr))p \supset q(pr)) \supset (p(qr)\ ((q(pr))p) \supset p(qr))(q(pr)))$ (IV) (M.P.)
20. $p(qr)\ ((q(pr))p) \supset p(qr)\ (q(pr))$ (19,18) (D)
21. $(p(qr) \supset (q(pr))p) \supset (p(qr) \supset q(pr))$ (20)
22. $(rp \supset pr) \supset (\bar{r}(rp) \supset \bar{r}(pr))$ (IV)
23. $rp \supset pr$ (III) (M.P.)
24. $\bar{r}(rp) \supset \bar{r}(pr)$ (22,23) (D)
25. $(r \supset rp) \supset (r \supset pr)$ (24)
26. $r \supset rp$ (II) (M.P.)
27. $r \supset pr$ (25, 26)
28. $(r \supset pr) \supset (qr \supset q(pr))$ (IV) (M.P.)
29. $qr \supset q(pr)$ (28,27)
30. $(qr \supset q(pr)) \supset (p(qr) \supset p(q(pr)))$ (IV) (M.P.)
31. $p(qr) \supset p(q(pr))$ (30, 29)
32. $p(q(pr)) \supset (q(pr))p$ (III)
33. $(p(q(pr)) \supset (q(pr))p) \supset (p(qr)\ (p(q(pr))) \supset p(qr)$
$((q(pr))\ p))$ (IV)
(M.P.)
34. $p(qr)\ (p(q(pr))) \supset p(qr)\ ((q(pr))p)$ (33,32) (D)
35. $(p(qr) \supset p(q(pr))) \supset (p(qr) \supset (q(pr))p)$ (34) (P.M.)
36. $p(qr) \supset (q(pr))p$ (35,31) (M.P.)
37. $p(qr) \supset q(pr)$ (21, 36) (q.e.d.)

Aşadar, 37 paşi demonstrativi pentru fundamentarea axiomatică a unui singur enunţ, exprimînd asociativitatea şi comutativitatea disjuncţiei!... Să recunoaştem, însă, că nu toate teoremele revendică demonstraţii atît de laborioase şi nici nu este necesară redarea demonstraţiei într-o notaţie pe deplin explicită [30].

Cu toate posibilităţile de simplificare la care am făcut aluzie, se cere să vedem în exemplul de demonstraţie pe care l-am oferit o posibilitate teoretică şi nu o necesitate a sistemului tezial. Cu atît mai mult nu poate fi vorba de calea eficientă pentru fundamentarea tezelor dintr-o teorie logică.

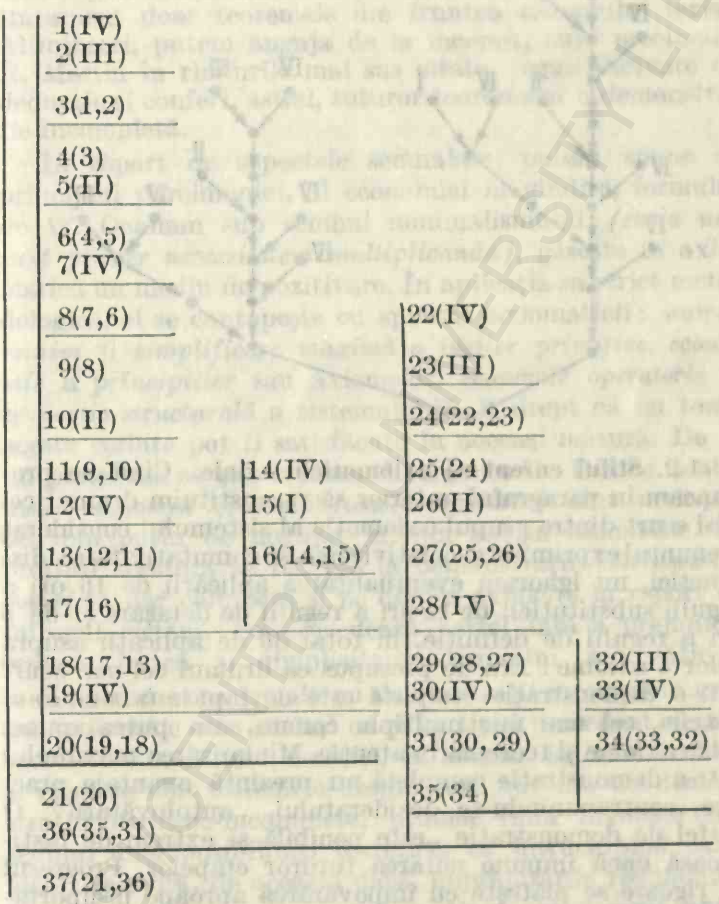
Analiza demonstraţiei de mai sus ne va releva, însă, şansele de optimizare a procesului fundaţional. Observăm că pînă la pasul (13), (M.P.) se aplică unor teze consecutive, (1)—(2), (4)—(5), (7)—(6), (9)—(10), (12)—(11). Pentru partenerul tezei (13) într-o situaţie inferenţială M.P., este nevoie de subdemonstraţia (14—17). Demonstraţia iniţială se continuă apoi prin segmentul (18—21). Pentru a o finaliza, este nevoie de subdemonstraţia (22—36) care angajează, la rîndu-i, ramificaţia (32—35). Demonstraţia integrală stratifică subdemonstraţii, acestea subdemonstraţii ş.a.m.d. Forma generală este cea a unui arbore cu ramificaţii dichotomice, şi nu a unei ordini strict-lineare. Demonstraţia fiind completă, în vîrfuri se vor afla în mod obligatoriu axiome. Ramurile orizontale vor marca intervenţia regulilor, cele verticale vor exprima subdemonstraţiile, sub-subdemonstraţiile ş.a.m.d., după cum converg direct cu trunchiul de bază, cu ramurile acestuia de ordinul 1 etc. Teorema căutată se plasează la ultimul punct de convergenţă cu trunchiul demonstraţiei.

Spaţializarea acestei situaţii inferenţiale din axiomatica tezială cu demonstraţii complete, realizată mai jos, ne îngăduie comparaţii instructive cu demonstraţia *naturală*, bazată numai pe reguli. Aceasta, în sensul atenuării diferenţelor teoretizate adesea în literatura de specialitate. Aceeaşi spaţializare va reprezenta un termen de referinţă pentru mecanismul demonstraţiei *incomplete*.

Demonstraţia principală vedem că angajează tezele (1—13), (17—21) şi (36—37). Subdemonstraţiile de ordinul întîi înlănţuie tezele (14—16), respectiv (22—31) şi (35). Subdemonstraţia de ordinul doi (în cadrul celei

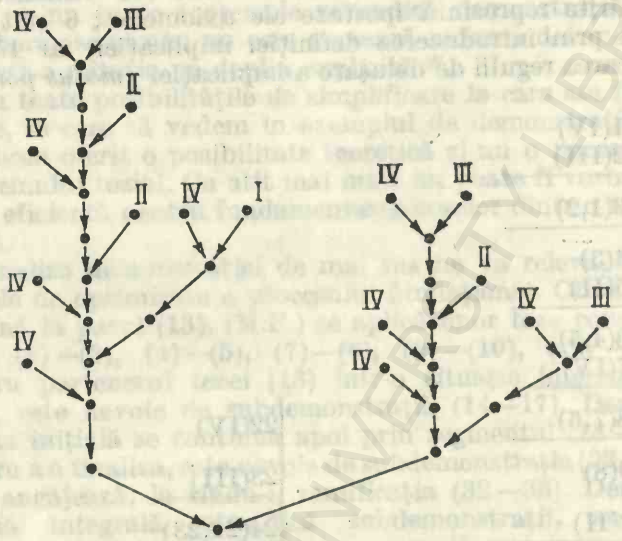
de a doua subdemonstrații de ordinul întîi) concatenează tezele (32—34).

Pe total, 16 din cele 37 de teze ale demonstrației urmărite reprezintă ipostaze ale axiomelor; 6 sînt obținute prin introducerea definiției implicației, iar 15 prin aplicarea regulii de detașare a implicației *(modus ponens)*.



Cel puțin la fel de concludent se ilustrează demersul fundațional al axiomaticii (teziale) cu demonstrații complete în contextul teoriei grafurilor. Graful unei asemenea

demonstrații este caracterizat de faptul că toate vîrfurile sînt axiome. În cazul nostru :



1.2. **Stilul curent al axiomaticii teziale.** Cînd ne propuneam în paragraful anterior să reconstituim drumul cel mai scurt dintre grupul axiomatic al sistemului considerat și enunțul exprimînd asociativitatea și comutativitatea disjuncției, nu ignoram eventualitatea aplicării de 16 ori a regulii substituției, de 14 ori a regulii de detașare și de 6 ori a regulii de definiție, în total 36 de aplicații asupra celor 4 axiome ! Era de presupus că drumul cel mai scurt într-o demonstrație *completă* este de fapt *minimul unui maxim*, cel mai mic multiplu comun, am putea spune, între axiome și teorema în atenție. Minimizarea maximului într-o demonstrație completă nu prezintă avantaje practice, contrapunîndu-se dezideratului, „autoînvățării". O astfel de demonstrație „este penibilă și extrem de fastidioasă dacă impune notarea tuturor etapelor. Progresul în rigoare se plătește cu împovărarea aproape insuportabilă a expunerii. Am putea face raționamentul mai rapid dacă : 1) omitem anumite etape despre care gîndim că lectorul le-ar putea reconstitui fără dificultate ; 2) în manieră mai radicală, demonstrînd reguli de deducție

derivate, stereotipizînd într-un fel anumite fragmente ale deducției care se întîlnesc frecvent"[31]. Într-adevăr, nici un sistem axiomatic nu procedează exclusiv prin demonstrații complete. Însăși demonstrația automatizată, presupunînd un grad avansat al standardizării, este realizată de mașini de calcul după principiul folosirii experienței înmagazinate și al autoinstruirii. Eventual, vor beneficia de acest tratament doar teoremele din fruntea sistemului tezial. Altminteri, putem angaja de la început, cum precizează R. Martin în rîndurile mai sus citate, reguli derivate de deducție și conferi, astfel, tuturor teoremelor o demonstrație incompletă.

În raport de aspectele semnalate, putem spune că principiul parcimoniei, al economiei în gîndire, formulat de W. Ockham sub semnul nominalismului *(entia non sunt praeter necessitatem multiplicanda)*, găsește în axiomatică un mediu de pozitivare. În aplicația sa strict metodologică, el se contopește cu spiritul axiomaticii: *număr minim* și *simplificare maximă a ideilor primitive*, *economie a principiilor* sau axiomelor, *economie operatorie* și *economie structurală* a sistemului [32]. E drept că nu toate aceste cerințe pot fi satisfăcute în aceeași măsură. De la un punct ele se și dovedesc divergente [33]. Dintre toate, însă, *economia* și *simplificarea operatorie* sînt cerințele cel mai puțin de neglijat într-un sistem axiomatic. În profitul acestora se recurge la demonstrații *intrinsec-incomplete*, dar complete și pe deplin explicite în raport cu întregul sistem. Se procedează astfel fără a prejudicia economicitatea și simplicitatea grupului axiomatic [34].

În axiomatica tezială cu demonstrații incomplete grupul axiomatic este același ca și în tipul precedent de sisteme. Ceea ce-i firesc, dealtfel, în măsura în care normale și efective sînt sistemele despre care vorbim, cu demonstrații intrinsec-incomplete, primele fiind invocate sub semnul unei posibilități teoretice, ca întruchipînd cazul ideal. Se evită, de această dată, împrejurările redundante în exploatarea bazei axiomatice. Cum am sugerat anterior, sistemele în atenție funcționează după principiul „autoinstruirii". Demersurile inferențiale cele mai frecvente sînt codificate sub forma *regulilor derivate de deducție*.

În exemplul nostru din paragraful precedent întîlnim, de pildă, de șase ori situația inferențială :

a) $(p \supset q) \supset (\bar{r}p \supset \bar{r}q)$ (IV)
b) $\dfrac{p \supset q}{\bar{r}p \supset \bar{r}q}$ (M.P.)
c) (a,b) (D)
d) $(r \supset p) \supset (r \supset q)$ (c)
e) $\dfrac{r \supset p}{r \supset q}$ (M.P.)
f) (d,e)

1	7	14	19	22
2	6	15	18	23
3	8	16	20	24
4	9	17	21	25
5	10	13	36	26
6	11	18	37	27

N-avem decît să codificăm această situație inferențială prin regula derivată de deducție :

$$\frac{\begin{array}{l} p \supset q \\ r \supset p \end{array}}{r \supset q} \text{ (R.S.)}$$

numită în literatura logico-matematică drept *regula silogismului*, pe considerentul că sancționează ca și silogismul aristotelic (modul *Barbara*) proprietatea de tranzitivitate a unei relații, în cazul nostru implicația. Angajarea noii reguli de deducție elimină dintr-o dată 15 din cei 37 de pași ai demonstrației.

În demonstrația la care ne referim se repetă și o altă situație inferențială :

a) $(p \supset q) \supset (rp \supset rq)$ (IV)
b) $\dfrac{p \supset q}{rp \supset rq}$ (M.P.)
c) (a,b)

12	30	28
11	29	27
13	31	29

Codificînd și această situație inferențială, sub numele regulii derivate de deducție (IVr), întrucît corespunde axiomei (IV),

$$\frac{p \supset q}{rp \supset rq} \text{ (IVr)},$$

și angajînd-o în demonstrație, mai eliminăm încă trei pași. Se înțelege că pe ansamblul sistemului propozițional Hilbert-

Ackermann vor fi la fel de eficiente şi regulile corespunzătoare celorlalte trei axiome :

$p \vee p \supset p$ (I) $\quad p \supset p \vee q$ (II) $\quad p \vee q \supset q \vee p$ (III)

$\dfrac{p \vee p}{p}$ (M.P.) $\quad \dfrac{p}{p \vee q}$ (M.P.) $\quad \dfrac{p \vee q}{q \vee p}$ (M.P.)

adică :

$\dfrac{p \vee p}{p}$ (Ir) ; $\quad \dfrac{p}{p \vee q}$ (IIr) ; $\quad \dfrac{p \vee q}{q \vee p}$ (IIIr).

Introducerea *regulilor derivate de deducţie*, ca abrevieri ale unor demersuri inferenţiale frecvente, nu epuizează posibilităţile simplificării demonstraţiilor din sistem. În fundamentarea teoremei de asociativitate, pe care o analizăm, strategia obţinerii tezei (6) se repetă în cazul tezei (27) :

a) (IV)
b) (III)
c) (a,b) (M.P.)
d) (c) (D)
e) (II)
f) (d,e) (M.P.)

Încă 5 paşi ai demonstraţiei noastre ar fi evitaţi dacă în teza (6) am substitui r/pr şi p/q, altfel spus, dacă am folosi *tezele deja obţinute în cursul demonstraţiei respective*, sau *teze incluse ca atare în nomenclatura sistemului, conform demonstraţiilor precedente*.

După simplificările menţionate, demonstraţia în atenţie va însuma doar 14 paşi, dispuşi într-un arbore cu o singură ramificaţie, ceea ce înseamnă că este fragmentată de o singură subdemonstraţie :

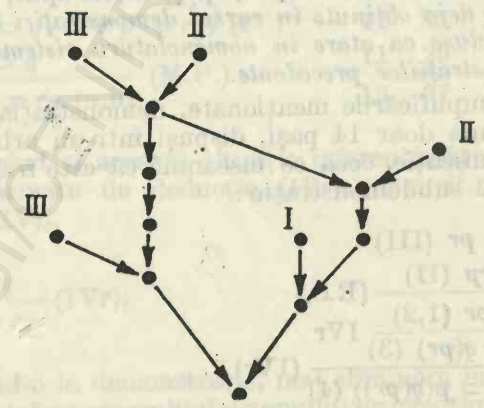
1. $rp \supset pr$ (III)
2. $r \supset rp$ (II) (R.S.)
3. $r \supset pr$ (1,2) IVr
4. $qr \supset q(pr)$ (3) (IVr)
5. $p(qr) \supset p(q(pr))$ (4)

6. $p(q(pr)) \supset (q(pr))p$ (III) (R.S.)
7. $p(qr) \supset (q(pr))p$ (6,5)
8. $pr \supset q(pr)$ (3)
9. $p \supset pr$ (II) (R.S.)
10. $p \supset q(pr)$ (8,9) (IVr)
11. $(q(pr))p \supset (q(pr))\ (q(pr))$ (10)
12. $(q(pr))(q(pr)) \supset q(pr)$ (I) (R.S.)
13. $(q(pr))p \supset q(pr)$ (12, 11) (R.S.)
14. $p(qr) \supset q(pr)$ (13,7) (q.e.d.),

respectiv :

1 (III)	
2(II)	
3(1,2)	9(II)
4(3)	8(3)
5(4)	10(8,9)
6(III)	11(10)
7(6,5)	12(I)
13(12,11)	
14(13,7)	

În graful corespunzător, ţinuta „incompletă" a demonstraţiei prestate (folosirea de două ori ca premisă a tezei 3) este subliniată de închiderea marcajului :



Dacă se compară timpul demonstrativ solicitat de introducerea regulilor derivate de deducție cu timpul economisit prin simplificarea demonstrației chiar și a unei singure teoreme, cea de asociativitate-comutativitate, pe care o avem în atenție, oportunitatea demonstrațiilor intrinsec-incomplete apare mai mult decît evidentă. În fond, demonstrația regulilor derivate de deducție am găsit-o în însăși demonstrația inițială a teoremei. N-am făcut decît s-o codificăm și să prevenim repetarea, în cadrul noii demonstrații, a itinerariilor parcurse deja.

La nivelul sistemului de teze logice, demonstrația intrinsec-incompletă a unei teoreme răspunde nu numai idealului de economicitate, ci și unui interes euristic. O astfel de demonstrație dobîndește semnificația unei definiții *sui-generis*. E ca și cum am căuta un *gen proxim* (teoremele demonstrate deja, în cadrul sistemului, și regulile derivate de deducție) și o *diferență specifică* (situațiile inferențiale inedite, create prin angajarea axiomelor și a regulilor primitive în demonstrarea teoremei considerate).

Conform celor precizate, demonstrația intrinsec-incompletă conferă teoriilor logicii formale o *realitate sistemică* maximă. Se reduce aportul direct al axiomelor și regulilor deductive primitive, dar apar toate legăturile posibile ale teoremei în atenție cu teoremele precedente, deja demonstrate. Prin dezvăluirea interdependenței metodologice a tezelor unei teorii, demonstrația așa-zisă incompletă — i-am putea spune, mai propriu, în formulare pozitivă, demonstrație *neredundantă* în contextul sistemului —, se face instrumentul unei *sistematizări* și *structurări* avansate[35]. Ea servește, astfel, unui scop major al științei contemporane. Unui scop care valorează în sine, dacă ne gîndim la performanțele atinse în expunerea concisă și fundamentarea riguroasă a diverselor teorii. Respectiv unui scop intermediar, dacă avem în vedere posibilitatea ca, printr-o astfel de „cartografiere", teoria axiomatico-formală să-și adjudece interpretări multiple, facilitînd explorarea indirectă a altor teorii izomorfe.

1.3. **Sistemele de teze fără axiome.** În virtutea jocului combinatoric al celor două criterii propuse în diversificarea procedurilor axiomatice, urmează să ne referim la sistemele cu *fundament normativ*, bazate exclusiv pe reguli

deductive. Discutăm axiomatica impusă de metoda *deducției naturale*. Mai întîi, așa cum a fost recomandată de Gentzen. În subcapitolul următor ne vom referi la axiomatica inspirată de celălalt creator al deducției naturale, St. Jaskowski, mai curînd idealizarea și cazul-limită al celei dintîi. Caracterul *incomplet* și respectiv *complet* al demonstrațiilor din sistemele celor doi autori, justificînd abordarea lor în subcapitole diferite, va fi apreciat de această dată după criterii mai slabe. Întrucît nu mai poate fi vorba de angajarea unor teze deja demonstrate, diferența va fi reperată doar în planul regulilor deductive. Numim *incompletă* demonstrația naturală care se realizează prin concursul unor reguli dependente, iar această dependență o taxăm ca atare pe temeiul interdefinisabilității functorilor logici.

Dacă facem abstracție de demonstrațiile *ex suppositione*, prezente în matematică în mai multe variante, începutul *deducției naturale* ar putea fi legat de *Cercetările logice* ale lui Gottlob Frege[36]. După ce consacră, prin *Begriffsschrift* (1879) și *Grundgesetze der Arithmetik* (2 vol., 1893, 1903), maniera curentă de explicitare prin axiome a rolului functorilor și realizează, astfel, prima axiomatizare a logicii formalizate, Frege ajunge în ultimul studiu publicat [37] la ideea definirii functorilor logici, în calitatea pe care le-o conferă de „conectori ai ideilor" [38], prin regulile deductive la care aceștia participă. Sîntem, desigur, în fața unor simple tatonări, dictate, poate, de insuccesul programului logicist, pus în aplicare în contextul metodei axiomatice *stricto sensu*.

Legătura care s-a putut face, dealtfel destul de recent, între căutările lui Frege din ultima perioadă a creației și *metoda deducției naturale* este inspirată de maniera operatorie la care parvine gînditorul german în definirea functorilor propoziționali. Aceasta paralel cu reducerea la *conjuncție* și *negație*, fără a depăși cadrul limbajului natural[39]. În transcrierea formală uzuală, considerațiile lui Frege se rezumă la următoarele[40]:

compuneri de gînduri $\begin{cases} 1)\ A \& B;\ 2)\ \sim(A \& B);\ 3)\ \sim A \& \sim B \\ 4)\ \sim(\sim A \& \sim B);\ 5)\ \sim A \& B;\ 6)\ \sim(\sim A \& B) \end{cases}$

definiții operatorii

A	$\sim(A \& B)$	$\sim A$
B	A	$\sim B$
$A \& B$	$\sim B$	$\sim A \& \sim B$
$\sim(\sim A \& \sim B)$	$\sim(\sim A \& B)$	$\sim(\sim B \& C)$
$\sim A$	B	$\sim(\sim A \& B)$
B	A	$\sim(\sim A \& C)$

Iată acum și comentariul lui Frege : „compunerile de idei (gînduri) construite pornind de la compunerea de primul gen (*conjuncția — n.ns., P.I.*) și de la negație par să merite un nume particular. Se vor numi compuneri de gînduri matematice. Nu vrem să spunem că nu mai sînt și alte compuneri de gînduri. Compunerile matematice par remarcabile din altă privință. Dacă, într-o compunere de acest tip, se înlocuiește un gînd adevărat cu alt gînd adevărat, compunerea astfel obținută este adevărată sau falsă după cum compunerea primitivă era adevărată sau falsă. Proprietatea rămîne valabilă dacă se înlocuiește un gînd fals prin alt gînd, de asemenea fals"[11]. Sintetizînd afirmațiile citate, teorema cu care se încheie studiul lui Frege asupra compunerii gîndurilor sancționează caracterul *veri-funcțional* al conectorilor considerați *(conjuncția, incompatibilitatea, rejecția, disjuncția, diferența logică conversă* și *replicația)*.

Cercetările logice urmează mai multor ani de meditație asupra deficiențelor celei de a doua *ideografii*, prin care s-a încercat logicizarea aritmeticii. Frege supune acum unui nou examen principiile de construire a limbii formulare. Și chiar dacă propune mai mult decît expune[12], logicianul german nu reușește să parcurgă drumul către noua versiune a sistematizării deductive. Așa cum apreciază Claude Imbert, Frege se mulțumește „să dea în treacăt cîteva reguli, fără să pretindă că ele ajung pentru formalizarea oricărei deducții sau că ar constitui un sistem logic necontradictoriu. Cel mult el își exprimă convingerea că cele șase compuneri descrise reprezintă adecvat compunerile de gînduri matematice. Dacă am vrea să judecăm

cu cea mai mare rigoare această teorie a deducției, ar trebui să facem mai întîi bilanțul regulilor de deducție propuse (..). Și ar trebui să adăugăm regulile privitoare la cuantificare (cele pe care le-ar fi putut da, tacit sau explicit, a *patra cercetare)*, dacă am vrea să comparăm schița lui Frege cu memoriul lui Gentzen" [43].

În același an în care apărea postum studiul lui Frege asupra compunerii gîndurilor matematice, în 1926, polonezul Jan Łukasiewicz, creator al logicii polivalente, atrăgea atenția studenților săi că matematicienii nu apelează, în demonstrațiile lor, la *tezele* teoriei deducției și că ei se sprijină pe metode de raționare în care rolul esențial revine unor supoziții mai mult sau mai puțin arbitrare. Acest alt mare deschizător de drumuri în logica formalizată ridica problema de a aduce respectivele metode matematice sub regimul unor reguli structurale, respectiv de a analiza relațiile lor cu teoria deducției, adică cu logica axiomatizată a propozițiilor[44].

Primele rezultate relativ la problema enunțată aveau să fie prezentate, la seminarul lui Łukasiewicz, în cursul aceluiași an, de către St. Jaśkowski. Ele vor fi comunicate, în anul următor, primului Congres al matematicienilor polonezi și vor fi menționate în publicația acestuia, *Ksiega pamiatkowa pierwszego polskiego zjazdu matematycznego* (Kraków, 1929)[45].

În 1934, independent unul de altul, și probabil fără să cunoască cercetările lui Frege, Gentzen [46] și Jaśkowski[47] ajung la rezultate concludente în formalizarea raționamentelor „naturale". Ambii pun la punct *calcule ale aserțiunilor sub supoziții*, „calcule *N*" (Gentzen) sau „calcule ale deducției naturale". În plus, Gentzen mai propune, „calcule *L*", *ale aserțiunilor de consecință* sau *secvențelor*, a căror importanță se va dovedi covîrșitoare, atît prin alternativa propusă la axiomatica logică curentă, cît și prin aportul inedit la obținerea unor rezultate metalogice, respectiv la facilitarea programării automate a deciziei și demonstrației formale.

1.3.1. **Calculele axiomatice de tip *N*.** Esențială, în *deducția naturală*, este formalizarea enunțurilor sub supoziții. Calculele *N* răspund în manieră implicită acestui

deziderat. Cu toate acestea, Gentzen le rezervă acestora atributul de *calcule ale deducției naturale* (*NJ* pentru logica intuiționistă, *NK* pentru logica clasică)[48].

Scopul urmărit prin calculele *N* este „de a edifica un formalism care să reflecte cît mai exact posibil raționamentele logice utilizate realmente în demonstrațiile matematice"[49]. În calculele obișnuite, precizează Gentzen, se derivă formule valabile dintr-o serie de „formule logice fundamentale", cu ajutorul unui număr redus de procedee deductive. Deducția naturală nu pornește de la asemenea propoziții logice fundamentale, ci de la *ipoteze*, cărora vin să li se atașeze deducții logice. Grație unei deducții ulterioare, rezultatul este făcut independent de ipoteze[50].

La precizările autorului, să adăugăm că ipotezele făcute în deducția naturală a unei teze sînt intrinseci acesteia. De pildă, exprimă componentele sau instanțele antecedentului unei implicații, făcînd aproape transparent drumul care conduce la demonstrarea tezei respective.

Să urmărim explicația lui Gentzen pentru deducția naturală a enunțului $p \vee (q \& r) \supset (p \vee q) \& (p \vee r)$[51]:

Antecedentul este de formă disjunctivă. Presupunem pe rînd validitatea celor doi termeni ai săi:

Prima ipoteză: subenunțul p este valid. În acest caz, vor fi valide, de asemenea, subenunțurile $p \vee q$ și $p \vee r$. Iar dacă acestea sînt valide, va fi validă și conjuncția lor, $(p \vee q) \& (p \vee r)$.

A doua ipoteză: este valid subenunțul $q \& r$. Cum acesta este de formă conjunctivă, va fi valid fiecare din factori, subenunțurile q și r. Dar cînd este valid q, va fi de asemenea și $p \vee q$. Iar cînd este valid r, va fi și $p \vee r$. Deci, de la $q \& r$ parvenim iarăși la $(p \vee q) \& (p \vee r)$.

Cum secventul tezei noastre derivă din fiecare termen al antecedentului, va deriva și din disjuncția acestora. Altfel spus, antecedentul $p \vee (q \& r)$ implică secventul $(p \vee q) \& (p \vee r)$, q.e.d.

Autorul *Cercetărilor asupra deducției logice* mai explică deducția naturală a enunțurilor formale $(\exists x \forall y Fxy) \supset (\forall y \exists x Fxy)$ și $\neg(\exists x Fx) \supset \forall y \neg(Fy)$[52].

Conform exemplelor oferite de Gentzen, a realiza deducția naturală pentru un enunț formal revine la a arăta

că secventul formulei respective derivă din orice supoziție posibilă asupra antecedentului. Efectiv, la manipularea *regulilor de introducere* (I) sau *eliminare* (E) a functorilor și cuantificatorilor, exprimate de Gentzen după cum urmează:

$$\frac{\mathfrak{M}\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{M}\ \&\ \mathfrak{B}}\ (\mathrm{I}\&);\quad \frac{\mathfrak{M}\ \&\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{M}},\ \frac{\mathfrak{M}\ \&\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\ (\mathrm{E}\&);\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}\ \mathrm{v}\ \mathfrak{B}}\ \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}\ \mathrm{v}\ \mathfrak{B}}\ (\mathrm{Iv});$$

$$\frac{\mathfrak{M}\ \mathrm{v}\ \mathfrak{B}\quad \overset{(\mathfrak{M})}{\mathfrak{C}}\quad \overset{(\mathfrak{B})}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}\ (\mathrm{Ev});\quad \frac{\overset{(\mathfrak{M})}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{M}\supset\mathfrak{B}}\ (\mathrm{I}\supset);\quad \frac{\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}\supset\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\ (\mathrm{E}\supset);\quad \frac{\overset{(\mathfrak{M})}{\Lambda}}{\neg\mathfrak{M}}\ (\mathrm{I}_{\neg});$$

$$\frac{\mathfrak{M}\ \neg\mathfrak{M}}{\Lambda}\ (\mathrm{E}_{\neg})\quad \frac{\Lambda}{\mathfrak{D}}\ \text{etc.}$$ [53] (semnul Λ stă pentru „absurditate").

Între regulile menționate se instituie o stratificare specifică noului stil al fundamentării tezelor logice. Unele sînt reguli simple, de inferență imediată (E&, Iv) sau mediată (I&, E⊃). Regulile cu premise între paranteze valorează, în schimb, ca strategii deductive, intră în scenă după intervenția unor reguli simple, finalizîndu-le acțiunea în cadrul unor subdemonstrații: „Dacă, în conformitate cu alte reguli, din $\mathfrak{M}$ se deduce $\mathfrak{C}$ iar din $\mathfrak{B}$ se deduce de asemenea $\mathfrak{C}$, atunci din $\mathfrak{M}$ v $\mathfrak{B}$ se poate deduce $\mathfrak{C}$!" (Ev). Același statut, de meta-reguli, îl mai împărtășesc I⊃, I¬ etc.

Pe de altă parte, regulile introduc sau elimină operatori, rămînînd valabil criteriul de tipologizare sugerat anterior. Prin $\mathfrak{R}$ vom putea marca regulile privitoare la funcțiile de adevăr, prin $\mathfrak{R}'$ cele vizînd cuantorii ș.a.m.d.

Corespunzător, vom avea ecuațiile de axiomatizare:

$$\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}=\mathfrak{T},$$

$$\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}'=\mathfrak{T}'\ \text{etc.},$$

pentru sistemele *logicii propoziționale, logicii predicaționale* și nivelurilor analizei superioare acestora.

Întorcîndu-ne cu Gentzen la demonstrația explicitată mai sus, dobîndim următoarea ordine genealogică [54]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}\,1}{p \vee q}\,(\mathrm{Iv}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p}\,1}{p \vee r}\,(\mathrm{Iv})}{(p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\,(\mathrm{I\&}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \,\&\, r}\,1}{q}\,(E\&)}{p \vee q}\,(\mathrm{Iv}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \,\&\, r}\,1}{r}\,(E\&)}{p \vee r}\,(\mathrm{Iv})}{(p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\,(\mathrm{I\&})}{(p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\,(\mathrm{Ev})1}{p \vee (q \,\&\, r) \supset (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\,(\mathrm{I} \supset)2$$

Cît privește enunțul nostru exemplificator, de asociativitate și comutativitate a disjuncției, va angaja în axiomatica *ex suppositione* o genealogie de ordinul 6, comparativ cu demonstrația *tezială completă*, de ordinul 19, sau chiar cu cea *incompletă*, de ordinul 9. În raport cu aceasta din urmă, se constată o apropiere sensibilă a numărului de pași, micșorarea ordinului genealogic rezultînd din tendința extinderii pe orizontală a demonstrației *ex suppositione*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}}{p \vee r}\,(\mathrm{Iv})}{q \vee r \vee (p \vee r)}\,(\mathrm{Iv}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q}}{q \vee (p \vee r)}\,(\mathrm{Iv})}{q \vee (p \vee r)}\,(\mathrm{Ev}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{r}}{p \vee r}\,(\mathrm{Iv})}{q \vee (p \vee r)}\,(\mathrm{Iv})}{q \vee (p \vee r)}\,(\mathrm{Ev})}{p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)}\,(\mathrm{I} \supset)$$

(din p derivă $q \vee (p \vee r)$; din q și din r, ca atare și din $q \vee r$, derivă, de asemenea, $q \vee (p \vee r)$; prin urmare și din $p \vee (q \vee r)$ va deriva $q \vee (p \vee r)$; adică, e derivabil că $p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$, Q.E.D.).

Avantajele deducției naturale *stricto sensu*, căreia i-am spus *ex suppositione*, sînt reperate de Gentzen în următoarele împrejurări:

— Aplicabilitate la *raționamentul real*, în speță la formalizarea demonstrației matematice;

— *Rapiditate și economicitate*, derivația naturală a formulelor valide fiind aproape întotdeauna mai scurtă în

raport cu derivația corespunzătoare din calculele axiomatice obișnuite, *logistice*, cel puțin în privința ordinului genealogic, așa cum s-a relevat în cazul teoremei cu care ne exemplificăm;

— *Caracter sistematic.* Fiecărui functor și cuantificator îi corespunde o figură de deducție care-l introduce și una care-l elimină. „Introducerile reprezintă, ca să spunem așa, „definițiile" semnelor la care se referă, iar eliminările nu sînt, în ultimă analiză, decît consecințe ale acestor definiții"[55].

1.3.2. **Calculele axiomatice de tip** *L.* Fapt surprinzător, calculul *N*, configurat prin regulile de introducere și eliminare a functorilor și cuantificatorilor, nu poate acoperi decît lista teoremelor demonstrate în logica intuiționistă. Pentru a recupera cîmpul teorematic al logicii clasice, Gentzen recurge la un compromis cu stilul curent al axiomaticii teziale. Propune introducerea *terțului exclus*, $A \vee \neg A$, ca schemă de enunț fundamental, fără supoziții, altfel spus, ca axiomă, alături de reguli deductive. Ca alternativă la acest succedaneu, Gentzen[56] indică posibilitatea suplinirii axiomei menționate prin regula de deducție adițională care corespunde principiului *dublei negații*,

$$\frac{\neg(\neg A)}{A},$$

suspendat, ca și terțul exclus, în sistemul intuiționist al lui Heyting și în sistemele mai restrictive ca acesta.

O cale mult mai fructuoasă, prin orizonturile deschise standardizării demonstrațiilor, s-a dovedit a fi *promovarea explicită a enunțurilor sub supoziții*. Îi revine lui Gentzen în exclusivitate meritul de a fi consacrat, prin *calculul secvențelor*, acest stil de axiomatizare a unei teorii formalizate.

Nu, însă, și de a fi precizat exact semnificația inovației sale în tehnica deductivă. „Edificăm — spune Gentzen —, un calcul deductiv[57] (pentru logica predicatelor), care, pe de o parte, va fi un calcul «logistic» — în consecință, derivațiile nu vor mai conține aici formule-ipoteze ca în calculul *NJ* — și care, pe de altă parte, va păstra din calculul *NJ* repartiția procedeelor deducției în introduceri

şi în eliminări, ale fiecăruia din semnele logice"[58]. R. Feys apreciază, dimpotrivă, că „marea noutate a metodelor L este această introducere a asertării sub supoziţie, apoi enunţarea regulilor manipulării sale, care, în sistemele L, vor îmbrăca forma explicită a « figurilor de structură »"[59].

Să dăm, însă, cuvîntul mai întîi faptelor şi în marginea lor să conturăm dublul raport al axiomaticii L, cu axiomatica N şi cu axiomatica „logistică" clasică, axiomatica tezială *stricto sensu*. Decizia crucială a lui Gentzen a fost exprimarea dependenţei deductive a unei formule $\mathfrak{B}$ de alte formule (ipoteze, supoziţii) $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\mu$ printr-o formulă complexă, numită *secvenţă* de către autorul german, *enunţ (aserţiune) de consecinţă* de către unii comentatori ai acestuia :

$$\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}^{60}.$$

Din punct de vedere intuitiv, secvenţei de forma indicată îi va corespunde formula implicaţională :

$$\mathfrak{M}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{M}_\mu \supset \mathfrak{B}.$$

Aceasta numai în măsura în care *oricărui raţionament îi corespunde o teză implicaţională*, căci altminteri semnificaţia secvenţei este cea a unui *raţionament*, mai precis, a unei *forme de raţionament* sau *scheme deductive*[61].

În cazul cel mai general, secvenţa sau enunţul de consecinţă angajează formule multiple în antecedent, ca şi în succedent :

$$\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu.$$

Intuitiv, aceasta revine la o implicaţie între conjuncţia premiselor şi disjuncţia concluziilor, în spiritul exigenţei ca într-un raţionament valid premisele să exprime condiţia necesară a concluziilor, iar concluziile consecinţa suficientă a premiselor :

$$\mathfrak{M}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{M}_\mu \supset \mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu.$$

Precizînd semnificaţia intuitivă a secvenţei de formă generală, am sugerat, deja, posibilitatea cuprinderii unui înţeles mai amplu pentru noţiunea de raţionament, pen-

tru că în mod curent nu schematizăm raţionamentele cu concluzii multiple. În raport cu forma generală putem realiza cazurile de secvenţe vide în antecedent,

$$\rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

sau în succedent,

$$\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_\mu \rightarrow ,$$

avînd semnificaţia aserţiunii necondiţionate a unei disjuncţii şi respectiv a unei anticonjuncţii:

$$\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu,$$

$$-(\mathfrak{M}_1 \& \ldots \& \mathfrak{M}_\mu).$$

O secvenţă vidă în ambii membri, $\rightarrow$, va înlocui semnul Λ al propoziţiei false [62].

Faţă de ipostazele semnalate ale unei secvenţe, în orizontul teleologic al tezelor vor fi deduse secvenţe de forma $\rightarrow \mathfrak{B}$ [63].

L-deducţia secvenţelor de orice formă porneşte obligatoriu de la secvenţe fundamentale *(Grundsequenzen)* sau secvenţe iniţiale *(Anfangssequenzen)*:

$$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D},$$

ipostaziind principiul identităţii. În unele tratate, *secvenţele fundamentale* sînt asimilate unei scheme de axiome. Avînd în vedere semnificaţia conferită de Gentzen noţiunii de secvenţă, ca dependenţă deductivă între două şiruri de formule, considerăm că *L*-deducţia reprezintă un mod de sistematizare bazat exclusiv pe reguli deductive, şi preferăm să indicăm prin *Anfangssequenzen* scheme de secvenţe, în definitiv o schemă de reguli, asupra cărora acţionează alte două tipuri de reguli deductive, *operatorii* şi *structurale*. Primelor, Gentzen le spune „scheme ale figurilor de deducţie pentru semnele logice". Sînt regulile de introducere şi eliminare a functorilor (cuantorilor), indicate la prezentarea *N*-deducţiei, cu generalizările şi adaptările pe care le reclamă contextul secvenţelor (scheme de introducere în antecedent, în locul celor de

eliminare). Le menționăm doar pe cele pretinse de logica propozițiilor, la domeniul căreia limităm exemplificarea tehnicilor sistematizării deductive :

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M}\ \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{B}}\ \&s\,; \qquad \frac{\mathfrak{M}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta}\ \&a\,; \qquad \frac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{M} \& \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}\ \&a\,;$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}}\ vs\,; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}}\ vs\,; \qquad \frac{\mathfrak{M}, \Gamma \to \Theta\ \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta}\ va\,;$$

$$\frac{\mathfrak{M},\ \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}}\ \supset s\,; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{M} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ \supset s\,;$$

$$\frac{\mathfrak{M}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg \mathfrak{M}}\ \neg s\,; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M}}{\neg \mathfrak{M},\ \Gamma \to \Theta}\ \neg a.$$

Celorlalte reguli, Gentzen le spune „scheme ale figurilor de deducție structurale". Sînt reguli de *atenuare* (At), de *contracție* (Ct) și *permutare* (Pt), pentru antecedentul și succedentul unei secvențe, respectiv *regula tăieturii* (Tr), aceasta din urmă fără a fi indispensabilă :

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}\ At.a\,; \qquad \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}\ Ct.a\,; \qquad \frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}\ Pt.a\,;$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}\ At.s.\,; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}\ Ct.s\,; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Lambda}\ Pt.s\,;$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}\ \ \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ Tr.$$

Regulile menționate susțin acum întreaga logică propozițională, nerestrictivă sau clasică. *LJ*-derivarea, aferentă logicii intuiționiste, se va deosebi de *LK*-derivarea, (cea care privește logica clasică) prin singura împrejurare că secvențele angajate nu au în consecvent mai mult de

o formulă[66]. Principiul *terțului exclus*, în formula $A \vee \neg A$, se va obține printr-o *L-derivare* de ordinul 6 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}\,\neg s}{\to A, \quad A \vee \neg A}\,vs}{\to A \vee \neg A, A}\,Pt.s}{\to A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,vs}{\to A \vee \neg A}\,Ct.s$$

[67]

Cît privește enunțul nostru exemplificator, de asociativitate și comutativitate a disjuncției, demonstrația sa în calculul secvențelor va înscrie o genealogie tot de ordinul 6, ca și în deducția naturală *ex suppositione*. O redăm în simbolistica uzitată : Comparația celor două moduri de a deriva natural enunțul logico-formal în atenție, în stil *N* și în stil *L*, surprinde nu atît prin prezența aceluiași ordin genealogic al demonstrațiilor, cît prin corespondența riguroasă a șirurilor de „ascendenți". *N*-deducția enunțului nostru de asociativitate și comutativitate pornește de la supozițiile p, q, r. *L*-deducția corespunzătoare — de la secvențele fundamentale $p \to p\,q$, $\to q, r \to r$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p}{p \to p \vee r}\,vs}{p \to q \vee (p \vee r)}\,vs \qquad \dfrac{\dfrac{q \to q}{q \to q \vee (p \vee r)}\,v\,s \qquad \dfrac{\dfrac{r \to r}{r \to p \vee r}\,v\,s}{r \to q \vee (p \vee r)}\,v\,a}{q \vee r \to q \vee (p \vee r)}\,v\,a}{p \vee (q \vee r) \to q \vee (p \vee r)}\,v\,a}{\to p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)}\,\supset s$$

Toate supozițiile din prima demonstrație se regăsesc, într-o ordine răsturnată, în antecedenții secvențelor din a doua demonstrație. În acest sens trebuie să-i dăm dreptate lui R. Feys, că *L*-deducția explicitează rolul supozițiilor.

Dacă ne întoarcem la *N*-deducția exemplificată de Gentzen pe enunțul de distributivitate a conjuncției în raport de disjuncție și realizăm *L*-deducția corespunză-

toare, ajungem, prin comparație, la aceeași constatare. Supozițiile din prima derivație se instalează în antecedenții secvențelor din a doua derivație. În plus, fiecare secvență nou obținută este transparentă la ascendenți, demonstrația realizîndu-se prin complicarea și cumularea progresivă a secvențelor fundamentale inițiale. Iată *L*-deducția cu care trebuie comparată *N*-deducția lui Gentzen redată anterior:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p}{p \to p \vee q}\ \vee s \quad \dfrac{p \to p}{p \to p \vee r}\ \vee s}{p \to (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\ \&\, s \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{q \to q}{q \to p \vee q}\ \vee s}{q \,\&\, r \to p \vee q}\ \&a \quad \dfrac{\dfrac{r \to r}{r \to p \vee r}\ \vee s}{q \,\&\, r \to p \vee r}\ \&a}{q \,\&\, r \to (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\ \&\, s}{p \vee (q \,\&\, r) \to (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)}\ \vee a$$

$$\to p \vee (q \,\&\, r) \supset (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)\ \supset s$$

Un ultim exemplu va întări constatarea de mai sus, în condițiile cînd *L*-deducția enunțului logico-formal considerat nu mai întrunește același ordin genealogic cu *N*-deducția, corespondența păstrîndu-se între șirul supozițiilor și cel al secvențelor inițiale:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \quad q}{p \,\&\, q}\ I\,\& \qquad \dfrac{\dfrac{p \to p}{q, p \to p}\ At.a \qquad \dfrac{\dfrac{q \to q}{p, q \to q}\ At.\ s}{q, p \to q}\ Pt.\ a}{q, p \to p \,\&\, q}\ \&\, s}{q \supset p \,\&\, q}\ I \supset \qquad p \to q \supset p \,\&\, q\ \supset s}{p \supset (q \supset p \,\&\, q)}\ I \supset$$

$$\to p \supset (q \supset p \,\&\, q)$$

1.4. **Deducția naturală cu demonstrații complete.** Nici *N*-deducția și nici *L*-deducția din cele două calcule consacrate de Gentzen nu promovează *interdefinisabilitatea* și reducerea corespunzătoare a functorilor și cuantificatorilor logici. Ca atare, nu se pune problema reducerii regulilor deductive. Cînd afirmă că schemele calculului *L* sînt mutual independente[68], Gentzen are în vedere posi-

bilitatea înlocuirii schemelor operatorii prin secvenţe iniţiale sau fundamentale. Eventualitate în care ne-am întoarce, însă, la deducţia axiomatică curentă.

Drumul urmat de Gentzen este contrar în mai multe privinţe reducerii functoriale invocate. Dacă negaţia figurează mai în toate sistemele logistice tocmai datorită rolului unificator în reducerea functorilor şi a regulilor deductive explicitînd pe aceştia, Gentzen sugerează alternativa opusă, a eliminării totale a negaţiei. În condiţiile manipulării noţiunilor de *implicaţie* şi *(enunţ) fals* (Λ), negaţia unui enunţ ar reveni la abrevierea implicaţiei dintre acel enunţ şi enunţul fals. Adică, în loc de $\neg A$ putem pune $A \supset \Lambda$. În mod corespunzător, regulile de introducere şi eliminare a negaţiei vor fi suplinite de ipostaze ale regulilor de introducere şi eliminare a implicaţiei[69]. Tehnica deductivă propusă de Gentzen urmează în acest punct vederile intuiţioniste asupra logicii matematice ca logică autentică a matematicilor. Prin descalificarea tezelor logice din grupul axiomatic al sistemelor ipotetico-deductive, această tehnică deductivă va înrîuri, de fapt, mai mult decît formalismul lui Heyting să spunem, actuala mişcare constructivistă din logică şi matematică, propulsată din perspective multiple[70].

Nu în acelaşi spirit a imaginat deducţia naturală St. Jaśkowski despre a cărui contribuţie se spune pe nedrept c-ar interesa doar din punct de vedere istoric[71]. În deducţia naturală *stricto sensu*, nesecvenţială, intrată în uzul logicienilor, regăsim astăzi două caracteristici jaśkowskiene : angajarea unui *număr minim de reguli*, respectiv notaţia distinctă a *subdemonstraţiilor*.

Regulile *deducţiei naturale* preconizate de St. Jaśkowski explicitează aportul inferenţial al implicaţiei şi negaţiei, iar sistemul de teze care decurge din acestea reprezintă logica formulată în termeni de *implicaţie* şi *negaţie*, în speţă sistemul $C-N$ obţinut de Łukasiewicz prin ameliorarea axiomaticii fregeene.

Formulate verbal, regulile lui Jaśkowski corespund cu regulile gentzeniene indicate de noi prin $\sqsubset\!\mathrm{I} \supset^{\sqsupset}$, $\sqsubset\!\mathrm{E} \supset^{\sqsupset}$ şi $\sqsubset\!\mathrm{I}_{\neg}{}^{\sqsupset}$. Introducerea şi eliminarea implicaţiei sînt înţelese identic, diferă doar modul de a formula principiul *redu-*

cerii la absurd. Gentzen [72] îl asimilează cu schema *introducerii negației*:

$$\frac{\begin{matrix}(A)\\ \Lambda\end{matrix}}{\neg A}$$

iar Jaśkowski [73] cu o schemă de *eliminare a negației*:

$$\frac{\begin{matrix}(\neg A)\\ B\end{matrix}\quad\begin{matrix}(\neg A)\\ \neg B\end{matrix}}{A}\text{, adică }\frac{\begin{matrix}(\neg A)\\ \Lambda\end{matrix}}{A}.$$

O a patra regulă va exprima maniera lui Jaśkowski de numerotare a supozițiilor și aranjare a deducțiilor[74].

Iată și demonstrațiile de care se folosește pentru exemplificare autorul polonez redate în notația caracteristică școlii din care face parte:

1. Sp
1.1. $SCpq$
1.1. q
1. $CCpqq$
$CpCCpqq$

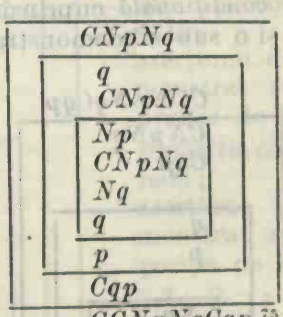
sau

$$\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} p \\ \boxed{\begin{array}{l} Cpq \\ p \\ q \end{array}} \\ CCpqq \end{array}} \\
\hline
CpCCpqq
\end{array}$$

2. $SCNpNq$
2.1. Sq
2.1.1. SNp
2.1.1. Nq
2.1. p
2. Cqp
$CCNpNqCqp$

sau

$$\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} CNpNq \\ \boxed{\begin{array}{l} q \\ CNpNq \\ \boxed{\begin{array}{l} Np \\ CNpNq \\ Nq \\ q \end{array}} \\ p \end{array}} \\ Cqp \end{array}} \\
\hline
CCNpNqCqp
\end{array}$$ [75]



Astăzi, stilul jaśkowskian de deducție naturală a fost îmbunătățit sub aspectul explicitării totale a pașilor demonstrației, ca și în privința vizualizării demersului deduc-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

tiv [76]. Se consideră *condiţională* deducţia care se sprijină pe regula de introducere a implicaţiei, respectiv *indirectă* deducţia care angajează schema eliminării negaţiei ce a fost în prealabil introdusă sub regimul unei supoziţii absurde. Este posibil ca aceeaşi demonstraţie să cuprindă ambele tipuri de supoziţii şi, corespunzător, de deducţii. Acţionează, însă, un *principiu al imparităţii*. Dacă demonstraţia începe printr-o deducţie condiţională, deducţia indirectă configurează subdemonstraţii ale acesteia, şi invers.

Să marcăm cele spuse în cazul exemplelor lui Jaśkowski. Primul ne indică o *demonstraţie condiţională*, în derularea căreia intervine o subdemonstraţie de asemenea *condiţională* :

1. $CpCCpqq$ — aserţiune (de demonstrat);
2. p — supoziţie condiţională;
3. $CCpqq$ — aserţiune (de demonstrat sub supoziţia condiţională de la 2);
4. Cpq — supoziţie condiţională
5. q — 4,2; E $\supset$.

Al doilea exemplu jaśkowskian ne conduce la o demonstraţie *condiţională* cuprinzînd o subdemonstraţie *condiţională* şi o sub-subdemonstraţie *indirectă* :

1. $CCNpNqCqp$ — aserţiune (de demonstrat);
2. $CNpNq$ — supoziţie condiţională;
3. Cqp — aserţiune de demonstrat sub supoziţia de la 2;
4. q — supoziţie condiţională;
5. p — aserţiune de demonstrat sub supoziţia de la 4;
6. Np — supoziţie absurdă;
7. q — 4;
8. Nq — 2,6 : E $\supset$.

Pentru demonstrația enunțurilor care conțin și alți functori decît implicația și negația, calculul natural al lui Jaśkowski ne oferă două alternative. Să aducem enunțurile de demonstrat la forma echivalentă care conține doar functorii C și N, sau să dotăm grupul axiomatic cu reguli adiționale de deducție, corespunzătoare functorilor definibili prin C și N.

Enunțul nostru exemplificator, relativ la asociativitatea și comutativitatea disjuncției, conține un singur functor excedentar sistemului C—N. Este însăși disjuncția, a cărei eliminare în beneficiul functorilor C și N ne încadrează într-o demonstrație de tip condițional. Procedînd astfel, vom desfășura o demonstrație în 10 timpi, cu subdemonstrații condiționale de ordin descrescător:

1. $p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$ — aserțiune (de demonstrat);
2. $(\bar{p} \supset (\bar{q} \supset r)) \supset (\bar{q} \supset (\bar{p} \supset r))$ — formulare echivalentă a aserțiunii de demonstrat;
3. $\bar{p} \supset (\bar{q} \supset r)$ — supoziție condițională;
4. $\bar{q} \supset (\bar{p} \supset r)$ — aserțiune de demonstrat sub supoziția de la 3;
5. $\bar{q}$ — supoziție condițională;
6. $\bar{p} \supset r$ — aserțiune de demonstrat sub supoziția de la 5;
7. $\bar{p}$ — supoziție condițională;
8. r — aserțiune de demonstrat sub supoziția de la 7;
9. $\bar{q} \supset r$
10. r — 3,7 : E $\supset$; — 9,5 : E $\supset$.

Iată acum și demonstrația prin cealaltă alternativă, reducerea la absurd a enunțului exemplificator:

1. $pv(qvr) \supset qv(pvr)$ — aserțiune de demonstrat;
2. $pv(qvr)$ — supoziție condițională;
3. $qv(pvr)$ — aserțiune de demonstrat sub supoziția de la 2;
4. $-(qv(pvr))$ — supoziție absurdă;
5. $\bar{q}\&-(pvr)$ — 4, I df.$\bar{v}$;
6. $\bar{q}$ — 5, E &;
7. $-(pvr)$ — 5, E &;
8. $\bar{p}\ \&\ \bar{r}$ — 7, I df. v;
9. $\bar{p}$ — 8, E &;
10. $q\ v\ r$ — 2,9 : E v;
11. $\bar{r}$ — 8, E &;
12. r — 10,6 : Ev.

În locul unei definiții inițiale, ca în prima alternativă, a trebuit să recurgem, așadar, la regula definițională a *antidisjuncției* și la alte trei reguli derivate de deducție, două prezente în calculul *N* al lui Gentzen, a treia — o variantă inedită[77] a eliminării *disjuncției*:

$$\frac{-(pvq)}{\bar{p}\ \&\ \bar{q}}\ \text{I df. v};\quad \frac{p\ \&\ q}{p}\ \text{E \&};\quad \frac{p\ \&\ q}{q}\ \text{E \&};\quad \frac{\begin{matrix}p\ v\ q\\ \bar{p}\end{matrix}}{q}\ \text{E v}.$$

Că cele trei reguli deductive adiționale nu sînt indispensabile o dovedesc derivațiile de mai jos:

1. p — aserțiune de demonstrat;
2. $\bar{p}$ — supoziție absurdă;
3. $p\ \&\ q$ — premisă;
4. $-(p \supset \bar{q})$ — 3,I df. &;
5. $p \supset \bar{q}$ — aserțiune de demonstrat sub supoziția de la 2;
6. p — supoziție condițională;
7. $\bar{q}$ — aserțiune de demonstrat sub supoziția 6;
8. q — supoziție absurdă;
9. $\bar{p}$ — 2;
10. p — 6.

1. q — aserțiune de demonstrat;
2. $\bar{q}$ — supoziție absurdă;
3. $p \,\&\, q$ — premisă;
4. $-(p \supset \bar{q})$ — 3,I df. &;
5. $p \supset \bar{q}$ — aserțiune de demonstrat sub supoziția 2;
6. p — supoziție condițională;
7. $\bar{q}$ — 2.

1. q — aserțiune de demonstrat;
2. $p \vee q$ — premisă;
3. $\bar{p} \supset q$ — 2, I df. v;
4. $\bar{p}$ — premisă;
5. q — 3,4 : E $\supset$.

De vreme ce tot apelează la definiții, ca și prima alternativă, a doua manieră de adaptare a deducției naturale jaśkowskiene nu prezintă avantaje din punct de vedere practic. Am ilustrat-o ca simplă posibilitate, tangențial ideii de *reductibilitate* a schemelor operatorii gentzeniene. Dealtfel, nici expresia „demonstrație completă" nu este cea mai potrivită. Reducerea numărului de reguli deductive se cere compensată prin introducerea relațiilor de interdefinisabilitate pentru functori, ca atare a unor reguli definiționale, împrejurare contravenientă spiritului în care a fost recomandată deducția naturală.

Din punctul de vedere al *teoriei generale a sistemelor formale*, deducția *naturală* a tezelor logice este asimilată cu funcționarea *sistemului deducțional*. Este vorba, după J. Porte [78], de o structură $\mathcal{S}' = \langle \mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{R} \rangle$, în care $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ au aceeași semnificație ca în sistemul logistic (alfabetul, mulțimea f.b.f. și sistemul de numerotație), iar $\mathcal{K}$ reprezintă o relație $\mathfrak{S}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$, satisfăcînd următoarelor condiții:

(1) $\langle x \rangle \,\mathcal{K}\, x$;

(2) $\Gamma \,\mathcal{K}\, y \Rightarrow \Gamma \,\&\, \langle x \rangle \,\mathcal{K}\, y$;

(3) $\Gamma \,\&\, \langle x, y \rangle \,\&\, \Delta \,\mathcal{K}\, z \Rightarrow \Gamma \,\&\, \langle y, x \rangle \,\&\, \Delta \,\mathcal{K}\, z$;

(4) $\Gamma \,\mathcal{K} y$ și $\Gamma \,\&\, \langle y \rangle \,\mathcal{K}\, z \Rightarrow \Gamma \,\mathcal{K} z$ (unde Γ, Δ sînt șiruri finite oarecare de formule; $x_1, \ldots x_n$, y, z sînt formule oarecare, iar $\&$ reprezintă operația de concatenare).

Condițiile care definesc recursiv relația de deductibilitate, integrînd *deducția naturală* în *teoria generală a sistemelor formale*, ne întorc la *schemele structurale* ale calculului L, respectiv la schema de *secvență inițială*, *atenuarea*, *permutarea* și *tăietura*, propuse de Gentzen. Nu credem că astfel definită, noțiunea de sistem deducțional ar putea acoperi toate variantele deducției naturale, ale sistematizării tezelor fără aportul tezelor în grupul axiomatic. Definiția evocată va îngădui, totuși, o comparație între stilurile axiomatizării, foarte utilă sub aspectul funcțional, al realizării condițiilor metasistemice, de *consistență*, *completitudine*, *independență*, *categoricitate*, ca și al precizării raporturilor ierarhice dintre sisteme.

2. Axiomatica inferențială

Dacă *axiomaticii teziale* i-am subsumat diversele calcule deductive parvenind la teze (legi) logice, vom alinia *axiomaticii inferențiale* acele tipuri de sisteme ale căror puncte de sosire reprezintă scheme (reguli) de inferență.

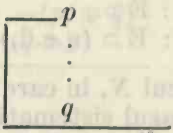
Istoricește, sistemele inferențial-deductive dețin prioritatea. În ele s-a întruchipat deopotrivă reducerea aristotelică a modurilor silogisticii categorice și reducerea stoică a inferențelor propoziționale la cinci dintre ele, luate ca argumente „indemonstrabile".

Priorității cronologice i se adaugă astăzi un ascendent „funcțional" al sistemelor de scheme deductive, în matricea acestui orizont teleologic înscriindu-se cursul *naturalizării* logicii[79].

Și în axiomatica inferențială vom putea identifica stiluri și variante ale acestora. Criteriul urmărit de această dată este *gradul de omogenitate descrescîndă* între grupul axiomatic și grupul teorematic al sistemului „ipotetico-deductiv".

2.1. Modalități de sistematizare a schemelor deductive propoziționale. Logica propozițională este domeniul *axiomaticii inferențiale* $\mathcal{R} - \mathcal{R}$, în care $\mathcal{T}$-reguli nu diferă de $\mathcal{A}$-reguli decît, eventual, prin numărul premiselor. Va fi mai mic, de regulă, numărul premiselor din regulile

grupului axiomatic, în calitatea lor de scheme *operatorii* (de introducere sau eliminare a functorilor) sau scheme *structurale*. Neprecizat apare numărul premiselor în cazul unor meta-reguli precum schema de introducere a *implicației*,



$$\therefore p \supset q^{80},$$

aptă să orienteze o versiune a sistematizării schemelor deductive, anume *demonstrația condițională*, cu care ne-am întîlnit și în axiomatica *tezială*. Se înțelege că sistemele inferențiale pot angaja $\mathcal{S}$-reguli deductive cu oricite premise.

Pe lîngă *demonstrația condițională*, pomenită, sistematizarea deductivă a schemelor de inferență se mai realizează prin *demonstrația indirectă* (*reductio ad absurdum*), de asemenea prezentă în axiomatica tezială, respectiv prin demonstrația *directă*, la care am recurs anterior în reducerea unei reguli deductive. Să analizăm pe rînd cele trei moduri de *reducere a schemelor de inferență* (de *sistematizare deductivă* sau pur și simplu de *axiomatizare* a acestora).

2.1.1. **Demonstrația directă.** În aranjamentul adoptat la expunerea metodei jaśkowskiene, o demonstrație sau derivare *directă* are ca primă linie concluzia schemei inferențiale ce urmează a fi justificată („aserțiunea de demonstrat"). Fiecare din celelalte linii constă dintr-o premisă a schemei date, sau din prima linie a unei demonstrații subsidiare (a unei „subdemonstrații"), sau se obține din cîteva linii antecedente cu ajutorul regulilor primitive de inferență („axiomele normative" pentru sistemul ipotetico-deductiv al schemelor deductive).

De exemplu, pentru schema deductivă;

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \supset q \\ q \supset r \end{array}}{r}$$

vom obține următoarea demonstrație *directă*;

1.	r	— aserțiune de demonstrat;
2.	p	— premisă;
3.	$p \supset q$	— premisă;
4.	$q \supset r$	— premisă;
5.	q	— 3,2 : E $\supset$;
6.	r	— 4,5 : E $\supset$ (q.e.d.).

Sîntem într-un calcul N, în care premisele operează ca *presupoziții*. Ca și în cazul sistematizării tezelor, avem de ales între a introduce scheme deductive primitive (cu rol de axiome normative) pentru fiecare functor, sau a porni cu un număr minim de asemenea reguli (să spunem pentru *implicație* și *negație*), și a transforma enunțurile care intervin în constituția schemelor inferențiale ce urmează a fi demonstrate în altele, echivalente, conținînd doar functorii explicitați în schemele primitive. Urmînd a doua variantă, e suficient să asumăm ca reguli primitive de deducție regulile de *eliminare a implicației* (prin *Modus Ponens* și *Modus Tollens*), de introducere, respectiv eliminarea *dublei negații* și regula (structurală) a *repetiției*, adică

$$\frac{A \supset B \quad A}{B}\ (\text{M.P.}); \quad \frac{A \supset B \quad \neg B}{\neg A}\ (\text{M.T.}); \quad \frac{A}{\neg(\neg A)}\ (\text{D.N.I.});$$

$$\frac{\neg(\neg A)}{A}\ (\text{D.N.E.}); \quad \frac{A}{A}\ (\text{R})^{81}.$$

Prin derivarea *directă* a concluziei din premisele unei scheme de inferență, regulile primitive operează în serviciul sintezei. Simplificarea regulilor primitive în baza reducerii functorilor se dovedește de aceea necesară. Chiar dacă am prezerva în grupul axiomatic al unui sistem inferențial reguli de deducție pentru *conjuncție*, *disjuncție* sau *incompatibilitate*, acțiunea lor n-ar putea fi concertată în cazul unei scheme de felul:

$$\frac{\begin{array}{l}\bar{s} \\ p/q \\ (r \supset p) \supset (p \,\&\, q) \\ (r \,\&\, \bar{p}) \supset (q \vee s)\end{array}}{q}$$

Apare aici indispensabilă exprimarea fiecărui enunț prin aceeași categorie de functori, în speță prin *implicație* și *negație*,

$$\frac{\begin{array}{l}\bar{s}\\ p \supset \bar{q}\\ (r \supset p) \supset -(p \supset \bar{q})\\ -(r \supset p) \supset (\bar{q} \supset s)\end{array}}{q}\ .$$

Prestată această transformare, angajarea unui număr minim de reguli primitive pentru demonstrarea schemei urmează de la sine :

1.	q	— aserțiune de demonstrat ;
2.	$\bar{s}$	— premisă ;
3.	$p \supset \bar{q}$	— premisă ;
4.	$(r \supset p) \supset -(p \supset \bar{q})$	— premisă ;
5.	$-(r \supset p) \supset (\bar{q} \supset s)$	— premisă ;
6.	$-(-(p \supset \bar{q}))$	— 3,D.N.I. ;
7.	$-(r \supset p)$	— 4,6 : M.T. ;
8.	$\bar{q} \supset s$	— 5,7 : M.P. ;
9.	$-(-q)$	— 8,2 : M.T. ;
10.	q	— 9, D.N.E.

În calculul L, al secvențelor, deslușim două moduri de rezolvare a unei scheme deductive. Construind pur și simplu secvența corespunzătoare schemei deductive, ori sintetizînd secvența corespunzătoare concluziei din secvențele care exprimă premisele.

Pentru schema :

$$\frac{\begin{array}{l}p\\ p \supset q\\ q \supset r\end{array}}{r}\ ,$$

de exemplu, vom obține în primul caz secvența :

$$p,\ p \supset q,\ q \supset r \rightarrow r,$$

iar în al doilea caz secvența $\rightarrow r$, pe baza secvențelor $\rightarrow p$, $\rightarrow p \supset q$ și $\rightarrow q \supset r$:

$$\dfrac{\dfrac{q \rightarrow q \qquad r \rightarrow r}{q \supset r,\ q \rightarrow r}\ \text{I} \supset \text{a}}{\dfrac{p \rightarrow p \qquad q,\ q \supset r \rightarrow r}{p \supset q,\ p,\ q \supset r \rightarrow r}\ \text{I} \supset \text{a}}\ \text{Pt. a}$$

$$p,\ p \supset q,\ q \supset r \rightarrow r \text{ (q.e.d.)}\ \text{Pt. a}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\rightarrow p \supset q}{p \rightarrow q}\ \text{E} \supset \text{s} \qquad \dfrac{\rightarrow q \supset r}{q \rightarrow r}\ \text{E} \supset \text{s}}{\rightarrow p \qquad p \rightarrow r}\ \text{Tr.}}{\rightarrow r \text{ (q.e.d.)}}\ \text{Tr.}$$

2.1.2. **Demonstrația condițională.** Să analizăm în continuare demonstrația sau derivarea *condițională*, intervenind în cazul unei scheme deductive cu concluzia de formă implicativă. Forma generală a acestui tip de demonstrație va fi următoarea:

$Y_1 \supset Y_2$ — asertiune de demonstrat (concluzia regulii deductive care trebuie fundamentată);

Y_1	— supoziție condițională;
X_1	— premisă;
⋮	
X_n	— premisă;
⋮	
Y_2	

O astfel de demonstrație (derivare) vine să înlocuiască, mai precis să realizeze, demonstrația *directă* de forma:

$Y_1 \supset Y_2$ — asertiune de demonstrat;

X_1	— premisă;
⋮	
X_n	— premisă.
⋮	
$Y_1 \supset Y_2$	

Stilul de sistematizare a schemelor deductive la care ne referim manifestă proprietatea de *ratașare a implicației*, stipulată în calculul N prin regula de *introducere a implicației*, iar în calculele logistice uzuale prin așa-numita *teoremă a deducției* [82].

Cu titlu de exemplu dăm mai jos demonstrația condițională a *regulii silogismului* :

$$\begin{array}{lll}
 & 1. & p \supset r \quad \text{— aserțiune de demonstrat;} \\
 & 2. & \boxed{p} \quad \text{— supoziție condițională;} \\
p \supset q & 3. & \boxed{p \supset q} \quad \text{— premisă;} \\
q \supset r & 4. & \boxed{q \supset r} \quad \text{— premisă;} \\
\hline
p \supset r & 5. & \boxed{q} \quad \text{— 3,2 : E} \supset \text{ (M.P.);} \\
 & 6. & \boxed{r} \quad \text{— 4,5 : E} \supset .
\end{array}$$

În *calculul secvențelor*, diferența dintre demonstrația *directă* și cea *condițională* se estompează. Ca și anterior, putem construi secvența corespunzătoare schemei de inferență pe care o fundamentăm, după cum putem transpune premisele în secvențe inițiale și deduce din ele secvența concluziei :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{r \to r}\,\text{At. a}}{p, r \to r}\,\text{I} \supset \text{a}}{q \to q \qquad r \to p \supset r}\,\text{I} \supset \text{a}}{q \supset r,\ q \to p \supset r}\,\text{Pt. a}}{p \to p \qquad q, q \supset r \to p \supset r}\,\text{I} \supset \text{a}}{p \supset q,\ p,\ q \supset r \to p \supset r}\,\text{Pt. a}}{p, p \supset q, q \supset r \to p \supset r}\,\text{I} \supset \text{s}}{p \supset q, q \supset r \to p \supset r, p \supset r}\,\text{Ct. s}$$

$$p \supset q, q \supset r \to p \supset r \quad \text{(q.e.d.)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to p \supset q}{p \to q}\,\text{E} \supset s \qquad \dfrac{\to q \supset r}{q \to r}\,E \supset s}{p \to r}\,\text{Tr.}}{\to p \supset r}\,\text{I} \supset \text{s}$$

$$\to p \supset r \,\text{(q.e.d.)}$$

Respectiv :

$$\dfrac{\dfrac{\to p \qquad \dfrac{\to p \supset q}{p \to q}\,\mathrm{E} \supset \mathrm{s}}{\to q}\,\mathrm{Tr.} \qquad \dfrac{\to q \supset r}{q \to r}\,\mathrm{E} \supset \mathrm{s}}{\to r\,(\text{q.e.d.})}\,\mathrm{Tr.}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to p \qquad \dfrac{q \to q \qquad \dfrac{\dfrac{r \to r}{p,\ r \to r}\,\mathrm{At.\ a}}{r \to p \supset r}\,\mathrm{I} \supset \mathrm{s}}{q \supset r,\ q \to p \supset r}\,\mathrm{I} \supset \mathrm{a}}{q,\ q \supset r \to p \supset r}\,\mathrm{Pt.\ a}}{p \supset q,\ p,\ q \supset r \to p \supset r}\,\mathrm{I} \supset \mathrm{a}}{p,\ p \supset q,\ q \supset r \to p \supset r}\,\mathrm{Pt.\ a}}{p,\ p,\ p \supset q,\ q \supset r \to r}\,\mathrm{E} \supset \mathrm{s}}{p,\ p \supset q,\ q \supset r \to r\ (\text{q.e.d.})}\,\mathrm{Ct.\ a}$$

Din cele două moduri de a realiza secvenţial demonstraţia *directă* şi demonstraţia *condiţională* a unei scheme deductive, se relevă, prin exemplele de mai sus, cel care îngăduie sinteza premiselor în concluzie, conform modului curent de a concepe inferenţa. Se realizează, pe această cale, o *sinteză reductivă*, mai puţin laborioasă decît *sinteza constructivă* cu care se recomandă cealaltă alternativă pe care am avut-o în atenţie.

2.1.3. **Demonstraţia indirectă.** A treia formă de demonstraţie sau derivare a unei scheme deductive, cea *indirectă* sau *prin reducerea la absurd*, se desfăşoară după următorul traiect :

Y	— aserţiune de demonstrat ;
$\bar{Y}$	— supoziţie absurdă ;
X_1	— premisă ;
$\vdots$	
X_n	— premisă.
$\vdots$	
Z	
$\vdots$	
$\bar{Z}$	

În conformitate cu schema pe care am reprodus-o, a demonstra o concluzie Y din premisele $X_1, \ldots, X_n$ revine la a deriva două enunțuri contradictorii oarecare, Z și $\bar{Z}$, din premise și din supoziția $\bar{Y}$. Aceasta se justifică prin echivalențele:

$$Y \equiv (\bar{Y} \supset Z \,\&\, \bar{Z})$$

$$\bar{Y} \equiv (Y \supset Z \,\&\, \bar{Z}).$$

Încît, pentru a demonstra Y, e suficient să demonstrăm $\bar{Y} \supset Z \,\&\, \bar{Z}$, care, după schema demonstrației *condiționale* și regula introducerii *conjuncției*, ne conduce la obținerea enunțurilor Z și $\bar{Z}$ din premisele $X_1, \ldots, X_n$ și $\bar{Y}$. În mod similar, pentru a demonstra $\bar{Y}$ e suficient să derivăm Z și $\bar{Z}$ din premise și din Y[83a].

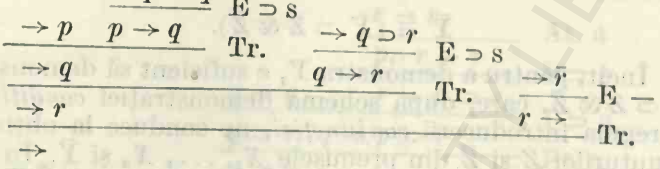
Pentru ilustrare vom lua schema prin care am explicitat anterior demonstrația *directă*:

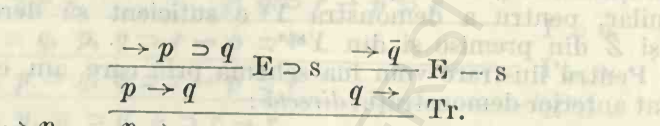
	1.	r	— aserțiune de demonstrat;
	2.	$\bar{r}$	— supoziție absurdă;
	3.	p	— premisă;
p	4.	$p \supset q$	— premisă;
$p \supset q$	5.	$q \supset r$	— premisă;
$q \supset r$	6.	$\bar{q}$	— 5,2 : E $\supset$ (M.T.);
r	7.	$\bar{p}$	— 4,6 : E $\supset$ (M.T.) (q.e.d. : a se compara liniile 3 și 7).

Uneori mai laborioasă, alteori mai simplă ca demonstrația *directă*, *reducerea la absurd* se dovedește utilă în cazul cînd cea dintîi nu dă rezultate. Schemele deductive din grupul axiomatic, ca reguli de inferență în care coeficientul sintezei dintre premise și concluzie este minim, pot fi reduse la număr tocmai prin concursul demonstrației *indirecte*. Însăși eliminarea *implicației* prin *modus tollendo-tollens* (M.T.), la care am recurs în demonstrația *indirectă* de mai sus, se demonstrează tot *indirect*, prin reducere la absurd, pe baza eliminării *implicației* prin *modus ponens*:

	1.	$\bar{p}$	— aserțiune de demonstrat;
	2.	p	— supoziție absurdă;
$p \supset q$	3.	$p \supset q$	— premisă;
$\bar{q}$ M.T.	4.	$\bar{q}$	— premisă;
$\bar{p}$	5.	q	— 3,2 : E $\supset$ (M.P.)

Foarte sugestivă este reducerea la absurd în *calculul secvențelor*. Sinteza premiselor cu anti-concluzia ne conduce la o secvență vidă în ambii termeni, ceea ce reprezintă însuși absurdul, contradicția logică. Dăm mai jos versiunea secvențială a reducerilor indirecte cu care ne-am ilustrat:





La propriu vorbind, *reducerea la absurd* nu mai este în calculul secvențelor o demonstrație *indirectă*. Conflictul dintre premise și anticoncluzie se exprimă direct, prin aneantizare logică, și nu mai reclamă medierea cuplului $Z, \bar{Z}$. Constatarea ne reamintește de reducția „*ostensivă și directă*" la absurd, preconizată de Gerolamo Saccheri (1667—1733). Dacă circuitul obișnuit al reducerii la absurd înscrie: 1) negarea contradictorie a tezei de demonstrat, 2) recuzarea antitezei astfel obținute din cauza consecințelor absurde la care conduce, respectiv 3) reabilitarea tezei, Saccheri a putut ilustra, printr-un efort de sublimă virtuozitate logică, posibilitatea ca însăși negația unei teze să ne constrîngă la adeverirea și afirmarea ei. Vrem, de pildă, să demonstrăm că „nici un silogism de figura I-a în modul *AEE* nu este concluziv". Saccheri ne invită să contestăm acest enunț și să acceptăm opusul său, „unele silogisme de figura I-a în modul *AEE* sînt concluzive". În speță, vom admite silogismul:

Orice silogism de figura I-a avînd majora universală și minora afirmativă este concluziv.

Nici un silogism de figura I-a în modul AEE *nu are majora universală și minora afirmativă.*

Deci, nici un silogism de figura I-a în modul AEE *nu este concluziv*

care fiind de formă *AEE*, conține în concluzie teza contestată prin însăși admiterea sa ca mod valabil [83].

2.2. **Axiomatica inferențială de tip** $\mathcal{R} - \mathcal{R}'$. Pentru ilustrare ne oprim la domeniul silogisticii, respectiv la sistemele care rezervă locul tuturor modurilor silogistice în grupul teorematic, $\mathcal{R}'$. Grupul axiomatic va putea angaja, în asemenea cazuri, scheme de inferență cu 1, 2 sau mai multe premise, fără ca vreuna din ele să exprime silogisme. Denivelarea de care vorbim între regulile primitive nesilogistice și regulile deductive silogistice, derivate din acestea, este susținută atît în versiunea clasială a silogisticii inferențiale, cît și în unele variante predicaționale.

Axiomatizarea silogisticii inferențiale în orizontul logicii *claselor* a fost întreprinsă, la noi, de P. Botezatu [84], într-un cadru extins și generalizat, de natură să conducă la sintaxa *logicii operatorii tranzitive*. Cum ne interesează doar experimentul axiomatic, precizăm că fiecare mod silogistic, tradițional sau inedit (conținînd propoziții exclusive), se demonstrează în sintaxa *LOT* cu ajutorul a trei categorii de reguli primitive: de *definiție* sau de *traducere* (reguli de introducere sau eliminare a definiției clasiale pentru functorii silogistici); reguli *operatorii* în sensul gentzenian, de introducere sau eliminare a functorilor clasiali; reguli *structurale*. Le menționăm pe cele care intervin în demonstrația modului exemplificator, *Cesare* [85].

Ca *reguli de definiție:* introducerea unui *definiens*, respectiv expulzarea unui *definiens* (adică introducerea unui *definiendum*):

$$\begin{array}{l|ll} m & X \text{ a } Y & \\ n & X \cap \bar{Y} = 0 & m: \text{Df. } a \text{ in.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} m & X \text{ e } Y & \\ n & X \cap Y = 0 & m: \text{Df. } e \text{ in.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} m & X \cap Y = 0 & \\ n & X \text{ e } Y & m: \text{Df. } e \text{ ex.} \end{array}$$

BCU IAȘI CENTRAL LIBRARY

Ca *reguli operatorii* intervin în demonstrația care urmează: introducerea, respectiv expulzarea unui *termen* (într-o sau dintr-o reuniune de intersecții), apoi introducerea și respectiv expulzarea *reuniunii* din egalități:

$$\begin{array}{l|ll} m & X & \\ n & (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) & m : T \text{ in.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} m & (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) & \\ n & X & m : T \text{ ex.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} m & X = 0 & \\ n & Y = 0 & \\ o & X \cup Y = 0 & m—n : R \text{ in.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll} m & X \cup Y = 0 & \\ n & X = 0 & m : R_1 \text{ ex.} \end{array}$$

Ca *regulă structurală*, menționăm, în fine, permutarea sau comutarea termenilor unei intersecții:

$$\begin{array}{l|ll} m & X \cap Y & \\ n & Y \cap X & m : \text{Ci.} \end{array}$$

Un silogism categoric fiind o inferență în care premisele și concluzia sînt propoziții simple, atomare, demonstrația modului *Cesare* va fi una *directă*. O reproducem în aranjamentul din sistemul *I.O.T.*, de natură să pună în lumină demersurile întreprinse în contextul primei premise, apoi al cuplării rezultatului cu transformările îngăduite de a doua premisă [86]:

1.	P e M	— premisă;
2.	$PM = 0$	— 1 : Df. e, in.;
3.	$PMS \cup PM\bar{S} = 0$	— 2 : T in.;
4.	$SPM \cup \bar{S}PM = 0$	— 3 : Ci;
5.	S a M	— premisă;
6.	$S\bar{M} = 0$	— 5 : Df. a, in.;
7.	$S\bar{M}P \cup S\bar{M}\bar{P} = 0$	— 6 : T in.;
8.	$SP\bar{M} \cup S\bar{P}\bar{M} = 0$	— 7 : Ci;
9.	$SPM \cup \bar{S}PM \cup SP\bar{M} \cup S\bar{P}\bar{M} = 0$	— 4—8 : R in.;
10.	$SPM \cup SP\bar{M} = 0$	— 9 : R_1 ex.;
11.	$SP = 0$	— 10 : T ex.;
12.	S e P	— 11 : Df.e, ex.

Analoagă, din punctul de vedere al procedurii axiomatice, va fi demonstrația *directă* a modului exemplificator *Cesare* în logica *predicațională* [87]. Se operează asupra unei premise, apoi asupra celeilalte, iar din sinteza rezultatelor se obține, prin reduceri succesive, concluzia dorită. Ca și în tratamentul *clasial*, deducția naturală *predicațională* a modurilor silogistice comportă trei feluri de reguli primitive. Le menționăm pe cele presupuse de fundamentarea modului *Cesare*. Ca *reguli definiționale:*

m |	X a Y	
n |	$(\forall x)\ (Xx \supset Yx)$	m : Df. *a*, in.;
m |	X e Y	
n |	$-(\exists x)\ (Xx\ \&\ Yx)$	m : Df. *e*, in.;
m |	$-(\exists x)\ (Xx\ \&\ Yx)$	
n |	X e Y	m : Df. *e*, ex.;

Ca *reguli operatorii*, pentru functori propoziționali și cuantificatori:

m |	P	
n |	P v Q	m : v in.;
m |	P v Q	
n |	$\frac{P}{R}\ \frac{Q}{R}$	
o |	R	m—n : v ex.;
m |	$\bar{P}$ v $\bar{Q}$	
n |	$-(P\ \&\ Q)$	m : —& in.;
m |	$-(P\ \&\ Q)$	
n |	$\bar{P}$ v $\bar{Q}$	m : —& ex.;
m |	$P \supset Q$	
n |	$\bar{Q}$	
o |	$\bar{P}$	m—n : ⊃ ex., M.T.;
m |	P	
n |	$(\forall x)P$	m : ∀ in.;
m |	$(\forall x)P$	
n |	P	n : ∀ ex.;

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

m	$(\forall x)-$	
n	$-(\exists x)$	m : $-\exists$ in. ;

m	$-(\exists x)$	
n	$(\forall x)-$	m : $-\exists$ ex. ;

În fine, ca *regulă structurală*, reiterarea :

m	P	
n	P	m : reit. [88]

Și acum demonstrația, în același aranjament ca și în cazul anterior :

1.	P e M	— premisă ;
2.	$-(\exists x)(Px \,\&\, Mx)$	— 1 : Df. *e*, in. ;
3.	$(\forall x) - (Px \,\&\, Mx)$	— 2 : $-\exists$ ex. ;
4.	$-(Px \,\&\, Mx)$	— 3 : $\forall$ ex. ;
5.	$-(Px) \vee -(Mx)$	— 4 : $-\&$ ex. ;
6.	S a M	— premisă ;
7.	$(\forall x)\ (Sx \supset Mx)$	— 6 : Df. *a*, in. ;
8.	x | $(\forall x)(Sx \supset Mx)$	— 7 : reit. ;
9.	$Sx \supset Mx$	— 8 : $\forall$ ex. ;
10.	$-(Px)$	— supoziție ;
11.	$-(Sx) \vee -(Px)$	— 10 : v in. ;
12.	$-(Mx)$	— supoziție ;
13.	$-(Sx)$	— 9—12 : $\supset$ ex.,M.T. ;
14.	$-(Sx) \vee -(Px)$	— 13 : v in. ;
15.	$-(Sx) \vee -(Px)$	— 5,10—11,12—14 :v ex. ;
16.	$-(Sx \,\&\, Px)$	— 15 : $-\&$ in. ;
17.	$(\forall x) - (Sx \,\&\, Px)$	— 16 : $\forall$ in. ;
18.	$-(\exists x)\ (Sx \,\&\, Px)$	— 17 : $-\exists$ in. ;
19.	S e P (q.e.d.)	— 18 : Df. *e*, ex.

Silogistica inferențială fundamentată în exclusivitate pe reguli primitive care nu sînt ele însele silogisme, prin care am ilustrat cazul sistemelor de scheme deductive $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}'$, va îngădui și *demonstrații indirecte*, prin reducere la absurd. Se construiește *antilogismul* modului silogistic considerat, stipulînd negația concluziei alături de cele

două premise, și se derivă cu ajutorul regulilor primitive două enunțuri oarecare contradictorii. În cazul nostru:

1.	S e P	— aserțiune de demonstrat;
2.	S i P	— supoziție absurdă;
3.	P e M	— premisă;
4.	S a M	— premisă;
5.	$SP \neq 0$	— 2, Df. *i*, ex.;
6.	$S \neq 0$	— 5, I ex.;
7.	$P \neq 0$	— 5, I ex.;
8.	$P\bar{M} = 0$	— 3, Df. *e*, ex.;
9.	$S\bar{M} = 0$	— 4, Df. *a*, ex.;
10.	$\bar{M} = 0$	— 8—7 : I ex.;
11.	$M = 0$	— 9—6 : I ex.[89]

respectiv:

1.	S e P	— aserțiune de demonstrat;
2.	S i P	— supoziție absurdă;
3.	P e M	— premisă;
4.	S a M	— premisă;
5.	$-(\exists x)(Px \,\&\, Mx)$	— 3 : Df. *e*, in.;
6.	$(\forall x)-(Px \,\&\, Mx)$	— 5 : — ∃ ex.;
7.	$-(Px \,\&\, Mx)$	— 6 : ∀ ex.;
8.	$(\forall x)(Sx \supset Mx)$	— 4 : Df. *a*, in.;
9.	$Sx \supset Mx$	— 8 : ∀ ex.;
10.	$-(Px) \vee -(Mx)$	— 7 : —& ex.;
11.	$-(Px)$	— supoziție;
12.	$-(Sx) \vee -(Px)$	— 11, v in.;
13.	$-(Mx)$	— supoziție;
14.	$-(Sx)$	— 9—13 : ⊃ ex., M.T.;
15.	$-(Sx) \vee -(Px)$	— 14 : v in.;
16.	$-(Sx) \vee -(Px)$	— 10,11—12, 13—15 : v ex.;
17.	$-(Sx \,\&\, Px)$	— 16 : —& in.;
18.	$(\forall x) - (Sx \,\&\, Px)$	— 17 : ∀ in.;
19.	$-(\exists x)\,(Sx \,\&\, Px)$	— 18; — ∃ in.;
20.	$(\exists x)\,(Sx \,\&\, Px)$	— 2 : Df. *i* in.[90]

Ca și în deducția naturală a tezelor logice, este posibilă reducerea la minimum a regulilor operatorii primitive, astfel încît silogistica inferențială fundamentată pe reguli care nu sînt silogisme să corespundă sistemelor de tip $\mathcal{R} \times \mathcal{R} = \mathcal{R}' + \mathcal{R}$. Sporirea regulilor definiționale dezminte, însă, impresia simplificării actului fundațional, iar suprasolicitarea reductibilității functorilor ne îndepărtează de spiritul constructivist al deducției naturale în genere.

2.3. **Axiomatica inferențială de tip** $\mathcal{R} \times \mathcal{R}' - \mathcal{R}$. După referințele la sistemele inferențiale $\mathcal{R} - \mathcal{R}$ și $\mathcal{R} - \mathcal{R}'$ se cuvine să luăm în discuție eventualitatea axiomaticilor de tip $\mathcal{R} \times \mathcal{R}' - \mathcal{R}$. De fapt, prioritatea acestora este din punct de vedere istoric absolută, idealul de *sistem ipotetico-deductiv* fiind consfințit în manieră riguroasă prin reducția aristotelică a modurilor silogistice, în contextul elaborării logicii însăși. În concepția marelui logician al antichității, reducerea modurilor silogistice are semnificația unei perfectări, atît sub aspectul temeiniciei acestora, cît și al transparenței la demersurile gîndirii. De aici privilegierea modurilor din prima figură. Pentru analiza pe care o întreprindem, nu contează decît faptul că silogismele sînt reductibile la cîteva din ele și că în explicitarea interdependenței dintre moduri intervin reguli primitive de deducție care în sine nu exprimă silogisme. Din $\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}' : \mathcal{R}$.

Sistemul ipotetico-deductiv al schemelor deductive silogistice configurat în *Analitica primă* a Stagiritului explicitează două din cele trei tipuri de derivație la care ne-am putut referi mai sus : *directă* și *indirectă* (reducerea la absurd). Mai naturală, în ochii lui Aristotel, trebuia să apară reducția *directă*. Acest tip de sistematizare nu satisface, însă, cerința *exhaustivității* sau *completitudinii*, cum se spune în limbajul axiomaticii actuale. Două moduri silogistice, *Baroco* din figura a II-a și *Bocardo* din figura a III-a, au cîte o premisă particular negativă, neconvertibilă, și rezistă ca atare demonstrației sau reducerii *directe*. Exhaustiv este al doilea procedeu, de reducere *indirectă*. Se ivește, însă, inconvenientul circularității. Reducerea indirectă a unui mod silogistic presupune, într-un fel, admiterea *ab initio* a tuturor celorlalte moduri, întrucît nu știm din capul locului la care dintre ele vom apela pentru

atestarea conflictului dintre premise și anticoncluzia ce întruchipează supoziția absurdă.

Reconvocînd modul silogistic exemplificator, *Cesare*, vom constata că în reducerea *directă* intervine regula de tip $\mathfrak{R}$, *Celarent*, adică unul din modurile asumate axiomatic, respectiv regula de tip $\mathfrak{R}'$, a conversiunii functorului *e*. Desfășurăm demonstrația în schematizarea tradițională și în aranjamentul standardizat al deducției naturale :

$$P \text{ e } M \xrightarrow{s} M \text{ e } P$$

$$\textit{Cesare}\ \frac{S \text{ a } M \longrightarrow S \text{ a } M}{S \text{ e } P \longleftarrow S \text{ e } P}\ \textit{Celarent}$$

1.	S e P	— aserțiune de demonstrat ;
2.	P e M	— premisă ;
3.	M e P	— 2 : Conversiune ;
4.	S a M	— premisă ;
5.	S e P	— 3—4 : *Celarent*

În reducerea indirectă a aceluiași mod va interveni regula primitivă *Ferio*, de tip $\mathfrak{R}$, și regulile de opoziție pentru *e* și *a*, de tip $\mathfrak{R}'$. Transcriem și aici demonstrația în ambele figurații :

$$P \text{ e } M \longrightarrow P \text{ e } M$$

$$\textit{Cesare}\ \frac{S \text{ a } M}{S \text{ e } P} \quad \frac{S \text{ i } P}{S \text{ o } M}\ \textit{Ferio}$$

1.	S e P	— aserțiune de demonstrat ;
2.	$-(S$ e $P)$	— supoziție absurdă ;
3.	S i P	— 2 : $-e$ ex. ;
4.	P e M	— premisă ;
5.	S o M	— 4—3 : *Ferio* ;
6.	$-(S$ a $M)$	— 5 : $-a$ in. ;
7.	S a M	— premisă.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În transpunerea modernă a sistematizării consacrate de Aristotel pentru modurile silogistice, regulile de deducție care nu sînt silogisme apar deopotrivă în grupul axiomatic și în grupul teorematic. Se promovează, astfel, subvarianta $\mathcal{R} \times \mathcal{R}' = \mathcal{R} + \mathcal{R}'$ a axiomaticii evocate. Un exemplu ni-l oferă T. J. Smiley, în sistemul căruia, de silogistică inferențială, apar silogisme și reguli care nu sînt silogisme. În grupul axiomatic:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A1. } Aab,\ Abc \vdash Aac\ (Barbara); \\ \text{A2. } Aab,\ Ebc \vdash Eac\ (Celarent); \end{array}\right\} \text{reguli } \mathcal{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{A3. } Eba \vdash Eab \text{ (conversiune)}; \\ \text{A4. } Aba \vdash Iab \text{ (conversiune)}^{91}; \end{array}\right\} \text{reguli } \mathcal{R}'$$

În grupul teorematic (citățm fragmentar prima suprateoremă a sistemului lui Smiley):

$$\left.\begin{array}{l} - \ Aca,\ Acb \vdash Iab; \\ - \ Aca,\ Icb \vdash Iab; \\ - \ Aca,\ Adb,\ Idc \vdash Iab; \end{array}\right\} \text{reguli } \mathcal{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} - \ P \vdash P; \\ - \text{ Dacă } X_i \vdash P_i \text{ și } P_1, \ldots, P_n \vdash Q, \text{ atunci } \\ \quad X_1, \ldots, X_n \vdash Q; \\ - \ Iba \vdash Iab; \text{ etc.}^{92} \end{array}\right\} \text{reguli } \mathcal{R}'$$

2.4. **Derivarea schemelor deductive în condițiile extinderii sistemului de teze.** Ultimul tip de *axiomatică inferențială* a fost introdus distinct în tabloul nostru din *Introducere*, datorită prezenței tezelor în ambele grupuri ale sistemului deductiv:

$$\mathcal{T} \times \mathcal{R} = \mathcal{T} + \mathcal{R}.$$

Ilustrarea am găsit-o tot în *silogistică*, în legătură cu studierea posibilității de integrare a modurilor inferențiale în sistemul tezelor silogistice, dezvoltat și el în extensia axiomaticii propoziționale [93]. Pornind de la sistemul

Łukasiewicz de silogistică tezială, am reușit să arătăm că în baza aceluiași grup axiomatic se poate suplimenta grupul teorematic cu modurile silogistice inferențiale, corespunzătoare tezelor postulate sau demonstrate. Ecuația axiomacitii în atenție marchează în cazul silogisticii paritatea tipurilor de teze din cele două grupuri ale sistemului: teze propoziționale ($(p \supset (q \supset p \,\&\, q))$ etc.); tautologii atomare (XaX, de pildă); educții și opoziții ($Aab \supset Iba$; $Aab \supset \neg Oab$; etc.); teze exprimînd silogisme.

În cele ce urmează reconstituim demonstrația completă a modului tezial *Cesare* în sistemul Łukasiewicz [94], iar în continuare construim schema inferențială corespunzătoare. Fundamentarea pe care o propunem nu mai reprezintă o simplă alternativă metodologică, la cele cîteva menționate deja. În analiza noastră structurală silogismul *categoric* ne apare ca abrevierea unui trio de silogisme *ipotetico-categorice* (cf. pașii 24–29 ai demonstrației de mai jos).

În demonstrația cu care ne ilustrăm, toate tezele propoziționale sînt asumate axiomatic, ca și la autorul polonez; mai intervin două din cele patru axiome specifice silogisticii,

Aaa (1)

$CKAbcIbaIac$ *(Datisi)* (4)[95],

respectiv reguli primitive de *substituție*, de *înlocuire a echivalentelor* în situații de interdefinisabilitate a functorilor silogistici, respectiv de *eliminare a implicației* prin *Modus Ponens* (M. P.). Tezele propoziționale și axiomele specifice silogisticii vor purta numărul de ordine conferit de Łukasiewicz. Și acum demonstrația:

1. $(MaP \,\&\, MiS \supset SiP) \supset (MaP \supset (MiS \supset SiP))$ — substituție în ax. propoz. VII;
2. $\dfrac{MaP \,\&\, MiS \supset SiP}{}$ M.P. — substituție în 4;
3. $\dfrac{MaP \supset (MiS \supset SiP)\ (1,2)}{}$ S
4. $SaS \supset (SiM \supset MiS)$ (3)
5. $\dfrac{SaS}{}$ M.P. — substituție în 1;
6. $\dfrac{SiM \supset MiS\ (4,5)}{}$ S

7. $MiS \supset SiM$ (6)

8. $(MiS \supset SiM) \supset ((p \,\&\, q \supset MiS) \supset (q \,\&\, p \supset SiM))$ — substituție în ax. propoz. XI;

M.P.

9. $(p \,\&\, q \supset MiS) \supset (q \,\&\, p \supset SiM)$ (8,7)

S

10. $(MaS \,\&\, MiP \supset PiS) \supset (MiP \,\&\, MaS \supset SiP)$ (9)

11. $MaS \,\&\, MiP \supset PiS$ — substituție în 4;

M.P.

12. $MiP \,\&\, MaS \supset SiP$ (10,11)

13. $(MiP \,\&\, MaS \supset SiP) \supset (-(SiP) \,\&\, MaS \supset -(MiP))$ — substituție în ax. propoz. XIII;

14. $-(SiP) \,\&\, MaS \supset -(MiP)$ (13,12) — i ex.

15. $SeP \,\&\, MaS \supset MeP$ (14)

S

16. $MeP \,\&\, SaM \supset SeP$ (15)

17. $(MiS \supset SiM) \supset (-(SiM) \supset -(MiS))$ — substituție în ax. propoz. VI;

M.P.

18. $-(SiM) \supset -(MiS)$ (17,7) — i ex.

19. $SeM \supset MeS$ (18)

20. $(SeM \supset MeS) \supset ((MeS \,\&\, q \supset r) \supset (SeM \,\&\, q \supset r))$ — substituție în ax. propoz. IX;

21. $(MeS \,\&\, q \supset r) \supset (SeM \,\&\, q \supset r)$ (20,19)

S

22. $(MeP \,\&\, SaM \supset SeP) \supset (PeM \,\&\, SaM \supset SeP)$ (21)

M.P.

23. $PeM \,\&\, SaM \supset SeP$ (22,16)

24. $(PeM \,\&\, SaM \supset SeP) \supset (PeM \supset (SaM \supset SeP))$ — substituție în ax. propoz. VII;

25. $PeM \supset (SaM \supset SeP)$ (24,23)

26. PeM — premisă;

M.P.

27. $SaM \supset SeP$ (25,26)

28. SaM — premisă.

M.P.

29. SeP (27,28) (q.e.d.)

Dacă în locul tezei silogistice *Cesare* (23) am fi derivat pe *Ferio*, puteam construi, în continuare, *demonstrația indirectă* a modului inferențial *Cesare*:

n.	SeP	— aserțiune de dem.;
n+1.	$-(SeP)$	— supoziție absurdă;
n+2.	SiP	— n+1 : $-e$ ex.;
n+3.	$(PeM \,\&\, SiP \supset SoM) \supset \supset (PeM \supset (SiP \supset SoM))$	— subst. în ax. pr. VII;
n+4.	$PeM \,\&\, SiP \supset SoM$	— *Ferio*;
n+5.	$PeM \supset (SiP \supset SoM)$	— n+3, n+4 : $\supset$ ex.,M.P.;
n+6	PeM	— premisă;
n+7.	$SiP \supset SoM$	— n+5, n+6 : M.P.;
n+8.	SoM	— n+7, n+2 : M.P.;
n+9.	$-(SaM)$	— n+8, $-a$ in.;
n+10.	SaM	— premisă.

3. Recapitulare tipologică

Prima concluzie cu care se deschide inventarul formelor de bază ale axiomaticii logice este *diversificarea și multiplicarea impresionantă a procedurilor de organizare deductivă a tezelor și a regulilor de inferență*. Unei teze logice cum este enunțul exprimînd asociativitatea și comutativitatea disjuncției i-am putut indica locul, pînă acum, în șase tipuri de sisteme ipotetico-deductive, corespunzător la tot atitea moduri de a demonstra, iar unei scheme deductive cum este modul *Cesare*, din figura a II-a silogistică,

i-am oferit opt variante de fundamentare deductivă, fără intenția epuizării ca atare a posibilităților.

Din punctul de vedere al tehnicii deductive, am putut surprinde sisteme care antrenează în baza deductivă teze și reguli (în cazul metodei axiomatice *stricto sensu*), respectiv numai reguli (procedeul deducției naturale). Fiecare din aceste moduri fundamentale ale sistematizării ipotetico-deductive suportă dedublarea după *forma* demonstrațiilor: completă sau incompletă. În matricea funcției de axiomatizare, discutată în *Introducere*, apelul la demonstrații incomplete este marcat prin regulile (derivate) de deducție din grupul axiomatic — liniile (I) și (III). Cum este vorba de un criteriu diversificator cu valoare generală, distincția exactă dintre demonstrația completă și cea incompletă va fi dată de comunicarea realizată între „teoreme" (în înțelesul lărgit, de teze sau scheme deductive) și grupul „axiomatic":

Caracterizarea metodologică a sistemului ipotetico-deductiv:	*Constituția demonstrațiilor complete:*	*Constituția demonstrațiilor incomplete:*
Deducție axiomatică a tezelor	*Axiome, Reguli primitive*	*Axiome, Reguli primitive, Reguli derivate, Teze deja demonstrate*
Deducție naturală a tezelor	*Reguli primitive (în principiu ireductibile)*	*Reguli primitive, Reguli derivate din cele primitive*
Deducție (naturală) a regulilor deductive	*Reguli primitive (în principiu ireductibile sau indemonstrabile)*	*Reguli primitive, Reguli deja demonstrate în baza celor primitive*

Diversificarea din punct de vedere metodologic a sistemelor ipotetico-deductive se continuă după *natura* sau procedeul demonstrației:

Forma tezei sau a concluziei schemei de inferență de justificat axiomatic:	*Supoziții:*	*Rezultatul demonstrației:*	*Natura demonstrației:*
P	—	P	*Directă*
$Q \supset R$	Q	R	*Condițională*
S	$\bar{S}$	$Z \,\&\, \bar{Z}$	*Indirectă*

Din punct de vedere teleologic, am presupus deja distincția dintre sistemele care instituie teze (respectiv teze și reguli) — să le numim *teziale* — și cele care fundamentează în exclusivitate reguli deductive, de aceeași categorie cu cele stipulate în baza deductivă ori de speță diferite. Le numim pe acestea din urmă *inferențiale.*

Incidența celor trei criterii metodologice și a criteriului teleologic ne conduce la tabloul complet al formelor axiomaticii :

Axiomatizarea d.p.d.v. teleologic: / *Axiomatizarea d.p.d.v. metodologic:*			*a tezelor*	*a regulilor*
TEZIALĂ cu demonstrații:	*DIRECTE*	*complete*	1	13
		incomplete	2	14
	CONDIȚIONALE	*complete*	3	15
		incomplete	4	16
	INDIRECTE	*complete*	5	17
		incomplete	6	18
NATURALĂ cu demonstrații:	*DIRECTE*	*complete*	7	19
		incomplete	8	20
	CONDIȚIONALE	*complete*	9	21
		incomplete	10	22
	INDIRECTE	*complete*	11	23
		incomplete	12	24

Desigur, nu toate cele 24 de forme pot întruchipa sisteme logice complete (adecvate sau saturate) în raport cu o teorie sau „algebră logică", cea propozițională să spunem. Unele forme de axiomatizare vor acoperi doar parțial teoria, ca alternative la subsistemul corespunzător al formei principale, eventual mai eficiente în spațiul respectiv. Într-o axiomatică obișnuită a tezelor propoziționale vom întîlni demonstrații directe, complete (1) și mai ales incomplete (2). Prin asumarea „teoremei deducției", același sistem va realiza demonstrații condiționale, ilustrînd cumulativ formele axiomatice (3) și (4). După cum va opera în stilurile (5)—(6) ori de cîte ori presupunerea unei antiteze va concura la obținerea a două teoreme contradictorii. În calculele de tip N și L, pentru deducția

naturală *stricto sensu* (supoziţională) şi pentru cea secvenţială, se ilustrează axiomatizările (8) şi (20), paralel cu variantele (10), (12), (22) şi (24). Calculul deducţiei *ex suppositione* de inspiraţie jaśkowskiană este disponibil pentru formele axiomatice (7), (9), (11), (19), (21) şi (23). În contextul analizei infrastructurale a silogismului categoric am putut indica reperele unei axiomatici de tip (13), în prelungirea căreia se propun variantele (14)—(18). Tezele — axiome şi teoreme — contribuie în aceste ultime şase forme de sistematizare la fundamentarea unor reguli deductive (silogisme) altele decît cele din categoria regulilor primitive. Teoremele unor astfel de sisteme sînt teze integrate în structura complexă a unor reguli deductive.

Examenul comparativ al formelor de bază din axiomatica logică ne inspiră, în continuare, următoarele notaţii :

1. Sistemele care ierarhizează tezele logice în axiome şi teoreme, în contextul unor demonstraţii complete, favorizează o perspectivă *atomistă*. Fiecare teoremă se justifică exclusiv prin axiome şi reguli primitive. Acestui avantaj pe linia autonomizării demonstraţiilor aferente întregului sistem i se opune complicarea excesivă a actului fundaţional. Apartenenţa tezelor la sistem revine la folosirea în comun a grupului axiomatic. Lipsa comunicaţiei dintre teoreme face redundantă funcţionarea sistemului. Accentul cade pe *axiomatizare*, ca posibilitate metodologică, şi nu pe teoria axiomatizată. Să numim astfel de sisteme *de tip „fiziologic"*. Condiţia de existenţă a acestora este *ilustrarea modului de funcţionare* a procedurii deductive, şi nu a rezultatelor sale concertate.

2. Axiomatizarea tezială cu fundament tezial şi demonstraţii incomplete relevă, în schimb, o perspectivă *integrativă* sau *holistă*. Demonstraţiile se simplifică, sistemul în ansamblu evită redundanţa, dar teoremele îşi pierd autonomia. Dezavantajul este manifest în situaţiile cînd o teză sau alta se cere justificată în interesul altui domeniu decît cel al teoriei, fără referinţe la congenerele sale. În sistemul de teze silogistice, spre exemplu, Łukasiewicz reporta 14 teze propoziţionale. Pentru a nu ne abate de la interesul unei extensiuni silogistice a calculului propoziţional, este preferabil ca în fundamentarea tezelor propoziţionale înseşi să fie angajat cît mai direct grupul axio-

matic, adică axiomele propoziționale. În raport cu stilul precedent, axiomatica tezială cu fundament tezial și demonstrații incomplete relevă sisteme *de tip „anatomic"*. Constatare paradoxală, dealtfel, întrucît în axiomatica curentă acesta este tipul de sisteme cu funcțiune efectivă.

3. Toate variantele deducției naturale a tezelor logice relevă sisteme *de tip „fiziologic"*. Teoremele acestora sînt mutual independente sub aspect metodologic, aservindu-se în exclusivitate grupului de reguli primitive. A defini astfel de sisteme înseamnă a propune o *relație de deductibilitate*, a caracteriza mecanismul metodologic, a arăta cum pot fi deduse tezele. Este un salt considerabil, de la actual la virtualitate, analog celuia marcat de introducerea unei mulțimi prin indicarea proprietăților caracteristice elementelor sale, *intensiv*, și nu prin enumerarea empirică a elementelor ca atare. Diferența dintre deducția naturală *completă* și cea *incompletă*, așa cum s-a notat pe parcurs, se exprimă în reductibilitatea schemelor primitive de deducție. Intervenția relațiilor de interdefinisabilitate pentru functori și cuantori asociază demonstrației naturale complete un coeficient de artificialitate, străin de intențiile programului cu care s-a impus noua tehnică deductivă.

4. Deducția naturală *stricto sensu*, prin supoziții, întruchipează o ordine *analitică* și *preponderent regresivă*. Consecventul unei teze este implicat de antecedent atunci cînd se deduce din acesta. O propoziție implică o conjuncție de alte propoziții atunci cînd din ea se deduce fiecare factor al respectivei conjuncții. O formulă este demonstrată dacă din negația ei se derivă un cuplu oarecare de propoziții contradictorii, etc., așa cum stipulează regulile operatorii ce definesc metoda în atenție. Spunem că *N*-deducția este preponderent regresivă, întrucît schemele de introducere a functorilor o propulsează în sens cumulativ și constructiv.

5. În replica acestei proceduri, *I*.-deducția impune un stil demonstrativ *sintetic* și *preponderent progresiv*. Nu întru totul progresiv, datorită acțiunii inverse a regulii de *contracție* și a celei de *tăietură*. Altminteri, această procedură deductivă în limbajul *secvențelor* regăsește și chiar apropie la un nivel superior al formalizării cele trei itinerarii ale deducției prin supoziții: deducția (derivarea, demonstrarea) *directă*, *condițională* și *indirectă*.

6. Deşi n-a fost studiată în perspectiva expresă a sistemului decît deducerea modurilor silogistice, şi aceasta relativ de curînd [96], considerăm că noţiunea de *sistematizare axiomatică* are aceeaşi legitimitate în universul tezelor ca şi în cel al schemelor de inferenţă. Putem vorbi de sisteme inferenţiale cel puţin în aceeaşi măsură în care prilejuieşte sisteme deducţia naturală a tezelor. Ţinuta lor este una *„fiziologică"*, în sensul pe care l-am mai precizat de cîteva ori, al comunicării fiecărei „teoreme" (scheme deductive derivate) direct cu grupul axiomatic. Această ordine radiară nu va îngreuia nici aici actul demonstraţiei. Am spune că dimpotrivă, îl scurtează şi standardizează la maximum. Putem semnala, în acest sens, performanţele atinse de calculul secvenţelor în aplicaţia acestuia la fundamentarea schemelor deductive din logica propoziţională.

Inventarul desfăşurat în cuprinsul capitolului, ca şi concluziile de mai sus, inspirate de acesta, au epuizat trei din cele patru linii ale *funcţiei* noastre *metasistemice, de axiomatizare*. Exact cele care-i fixează spaţiul de joc, liniile în care se realizează. În două pentru domeniul tezelor, în a treia pentru universul schemelor de inferenţă. În situaţia $\mathcal{T} \times \mathcal{R} = \mathcal{R}$ am considerat că funcţia de axiomatizare nu este satisfăcută. Cu toate acestea, *teoria generală a sistemelor formale* o reţine, în contextul noţiunii de *sistem tetic*, respectiv structura $\mathcal{S}'' = \langle \mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$, în care $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{R}$ au aceeaşi semnificaţie ca în *sistemul logistic*, iar $\mathcal{T}$ indică *mulţimea tezelor* ($\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$ şi $\mathcal{A} = \mathcal{T}$)[97].

Sistemul tetic, la care am făcut aluzie, reprezintă cazul-limită al axiomaticii. I-am putea spune *axiomatică de grad zero*, dar şi *trans-axiomatică*. Interesul acesteia? Speculativ, dacă vom repera manifestarea unui ideal panaxiomatic. Practic, însă, dacă vom fi atenţi la posibilităţile pe care le îngăduie noţiunea de sistem tetic pentru definirea graduală a proprietăţilor metateoretice de *acceptabilitate şi independenţă* (a regulilor primitive de deducţie ori axiomelor), a *echivalenţei* sistemelor etc. [98].

III. MARGINALII LA DIVERSIFICAREA AXIOMATICII

Prezentarea formelor de bază ale *axiomaticii logice*, în perspectiva celor două coordonate teleologice din știința în atenție — *fundamentarea tezelor*, respectiv *sistematizarea regulilor deductive*, de transformare a unor teze — ne-a înfățișat itinerariile semnificative ale demersului de *fundamentare deductivă a unei teorii*. Nu am intenționat să inventariem axiomatizările logicii în sensul cuprinderii *spațiului teoretic* al acestei complexe și prolifice discipline. Efortul a fost orientat către surprinderea cadrelor sale metodologice. Am apelat la unele teorii logice doar pentru a ilustra stilurile axiomaticii *lato sensu*. Exemplele de axiomatizare ne vor permite să apreciem inclusiv mutațiile produse în tehnica sistematizării deductive.

Ca *alternativă* la axiomatica uzuală, deducția naturală a tezelor logice prezintă avantajul forței explicative și al sporului în standardizare. Ca instrument *complementar* deducției teziale obișnuite, aflat și în serviciul sistemelor de scheme inferențiale, deducția naturală contribuie la unificarea și integrarea țelurilor cu care logica a fost, practic, confruntată de la începuturi, dacă acceptăm că silogistica Stagiritului justifică interpretarea deopotrivă ca sistem de teze și ca sistem de reguli deductive [1]. În cele ce urmează vom trece în revistă cuceririle *deducției naturale* sub titlu de răsfrîngeri pozitive ale fenomenului descris în capitolul precedent — diversificarea *metodei axiomatice*, înțeleasă ca sistematizare deductivă riguroasă a unei teorii.

1. Ierarhizare intra-teoretică și rol explicativ sporit

În concepția lui Gentzen, ambele stiluri ale deducției naturale, *N* (supozițională) și *L* (secvențială), trebuiau să

apropie logica de cursul efectiv al demonstrației matematice. „Am vrut — mărturisește autorul *Cercetărilor asupra deducției* — să construiesc în primul rînd un formalism care să fie cît mai aproape posibil de raționamentul real"[2]. Un formalism „care să reflecte cel mai exact posibil raționamentele logice utilizate realmente în demonstrațiile matematice" [3], precizează în altă parte reformatorul metodei deductive.

Axiomatica obișnuită, pe care o concurează Gentzen, Jaśkowski și ceilalți autori care le-au adoptat și perfecționat tehnica deductivă, procedează la afirmarea teoremelor în baza afirmării necondiționate a axiomelor. Este o metodă de *relativizare a afirmației enunțurilor dintr-o teorie* [4] și de-aici rezidă împrejurările incriminate de criticii formalismului: *alegere „arbitrară"* a axiomelor, *construcție convențională* a sistemului, *proliferarea* axiomatizărilor aceleiași teorii. La care se adaugă și faptul deloc neglijabil că pentru a fi maniabil, sistemul axiomatic trebuie să cultive *ordinea lineară* pentru teoreme, la dependența obligatorie a teoremelor față de grupul axiomatic adăugîndu-se un șir progresiv de dependențe între teoreme.

Sistematizarea deductivă naturală înlătură ambele deficiențe. Toate tezele împărtășesc aici statutul de *teoreme*, căci fiecare derivă exclusiv din regulile deductive postulate, operatorii și structurale. Nu mai poate fi vorba de *pluralismul* sistemelor de teze în fundamentarea naturală decît în contextul promovării interdefinisabilității functorilor logici, adică al variantei jaśkowskiene a deducției supoziționale. Ordinea teoremelor în deducția naturală este radiară față de grupul axiomatic, practic indiferentă. De-aici condiția de virtualitate a grupului teorematic, posibilitatea de a oferi „la comandă" demonstrația unei teze, într-o manieră aproape algoritmică și deci cu promptitudine. Dacă toate tezele sistemelor naturale comunică direct cu grupul regulilor primitive, metodologic devin independente unele de altele. Afirmarea lor prin demonstrație se înfăptuiește la același grad de relativitate. Putem să considerăm astfel reabilitată noțiunea de *lege logică*, în sensul revendicat de Wittgenstein [5].

Deducția naturală nu este, însă, o *simplă alternativă* la deducția axiomatică uzuală. Ea marchează un salt considerabil pe linia abstractizării, dezvăluind sensul operațiilor logice *vis-à-vis* de ideea generală a deducției. Prin

regulile cu rol de „axiome normative", sistemele deducției naturale consemnează intervenția operatorilor în „situații inferențiale", respectiv trecerile între situațiile inferențiale caracteristice operatorilor [6].

Sprijinindu-se pe sistematizările lui H. B. Curry [7], J. Ladrière conturează avansul explicativ al deducției naturale în contextul *implicației* și al *negației* [8]. Situațiile inferențiale cele mai frecvente în cazul *implicației* caracterizează, după Curry, „algebra propozițională absolută" (de ce nu *sistemul* sau *calculul* propozițional absolut ?). Aceste situații sînt exprimate în regulile de introducere și respectiv eliminare a *implicației* în cadrul secvențelor. Adică :

$$\frac{A \to B}{\to A \supset B}\ \mathrm{I} \supset \mathrm{s} \qquad (1),$$

într-o formă mai generală :

$$\frac{X, A \to B}{X \to A \supset B}\ \mathrm{I} \supset \mathrm{s} \qquad (1'),$$

respectiv :

$$\frac{X \to A \supset B}{X, A \to B}\ \mathrm{E} \supset \mathrm{s} \qquad (2)$$

Pentru sistemul *implicației clasice* se cere adăugată așa-numita regulă a lui Peirce :

$$((A \supset B) \supset A) \supset A \qquad (3),$$

exprimabilă ca regulă propriu-zisă în limbajul secvențelor logice și disponibilă unor generalizări :

$$\frac{X, A \supset B \to A}{X \to A}\ \mathrm{E} \supset \mathrm{a} \qquad (3').$$

Printr-o nouă generalizare, schemele de mai sus vor antrena de ambele părți ale semnului secvenței șiruri nedefinite de enunțuri. Pentru avantajul constructivității se va apela, totodată, în maniera lui Gentzen, la reguli de introducere în antecedent. Așa încît împrejurările inferen-

țiale create de implicație vor fi descrise mai complet prin următoarele scheme operatorii :

$$\frac{X, A \to B, Z}{X \to A \supset B, Z} \; I \supset a \qquad (1''),$$

$$\frac{X \to A, Z \quad X, B \to C, Z}{X, A \supset B \to C, Z} \; I \supset a \qquad (2'),$$

$$\frac{X, A \supset B \to A, Z}{X \to A, Z} \; E \supset a \qquad (3'').$$

După natura enunțurilor înlănțuite de aceste scheme, sistemele implicaționale sînt clasificate în *singulare* (angajează doar enunțuri de forma simplă $X \to B$) și *multiple* (cu enunțuri mai generale, de forma $X \to Y$) [9]. Prin numărul ca atare al schemelor deductive, sistemele respective vor fi mai *slabe*, ori mai *tari*.

Acest joc al dotării sistemelor îngăduie *ierarhizarea intrateoretică* [10] și explicarea succesivă a operatorilor specifici teoriilor logice. Instructivă este în această privință și analiza *negației*. Curry, spre exemplu, pornește de la două interpretări de bază, anume *negația-absurditate*, promovată de intuiționiști, respectiv *negația-refutabilitate* sau recuzarea, în sensul lui Łukasiewicz și Carnap. Prin mecanismul combinatoric al definițiilor și schemelor operatorii, autorul american ne înfățișează comunicările multiple dintre cele 5 sisteme ierarhice legate de tot atîtea forme ale *negației* logice.

Primul sistem, *LM*, al negației *minimale* sau refutabilității simple, se obține din *logica propozițională absolută*, prin adăugarea schemei *pentru contra-axiome* :

$$\frac{X \to F_i}{X \to F} \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

($F_1, \ldots, F_n$ reprezentînd contra-axiomele sistemului S al operațiilor logice uzuale, subiacent sistemului de deducție naturală, iar F întruchipînd un enunț fals oarecare), respectiv a *definiției (DN)* :

$$\sim A =_{df} A \supset F.$$

La același rezultat, definirea sistemului *LM*, se parvine prin suplimentarea sistemului propozițional absolut cu *schema pentru contra-axiome*, redată mai sus, și *schemele de introducere a negației* :

$$\frac{X, A \to F}{X \to \sim A} \text{ I} \sim \text{s} \qquad \frac{X \to A}{X, \sim A \to F} \text{ I} \sim \text{a}.$$

LJ, sistemul care formalizează *negația intuiționistă* sau absurditatea simplă, poate fi construit din *LM* precedent, prin adăugarea *schemei de absurditate* :

$$\frac{X \to F}{X \to A}.$$

Dotînd sistemul *LM* cu *schema terțului exclus*, parvenim la sistemul *LD* al *negației stricte* sau refutabilității complete.

Continuînd șirul de extensii, introducem sistemul *LE*, care dă formalizarea *negației în sensul refutabilității clasice* : adăugînd sistemului *LM regula lui Peirce*, sau completînd direct *logica clasică a implicației* cu *schema pentru contra-axiome* și *definiția (DN)*, toate menționate mai sus.

La ultimul sistem, *LK*, al *negației clasice* sau *absurdității complete*, se parvine prin cel puțin trei căi. Întărind sistemul *LJ* cu *schema terțului exclus* ; adăugînd *schema absurdității* la sistemul *LD* ; extinzînd direct *logica clasică a implicației* prin introducerea *schemei pentru contra-axiome*, a *definiției (DN)* și a *schemei absurdității* [11].

În toate sistemele evocate, regulile sau schemele deductive explicitează rolul operației logice, respectiv al *negației*, în cursul derivării enunțurilor. Ele prescriu în fond „cum pot fi introduse sau suprimate semnele de operație în cadrul unei deducții" [12].

În principiu, *deducția naturală* situează și explicitează rolul operatorilor în contextele inferențiale. Aceasta presupune *tematizarea derivației ca derivație*, consideră J. Ladrière. Și practic se creează posibilitatea receptării derivării sau demonstrației logice ca proces *sui-generis*, indiferent la natura și semnificația particulară a enunțurilor concatenate, poate chiar și la valoarea posibilă de adevăr

a enunțurilor respective. Căci, sub auspiciile deducției naturale, logica dovedește că se interesează, așa cum dorea Frege, nu de *adevărul de fapt* al premiselor și concluziilor din demonstrații, ci de condițiile *transmiterii adevărului eventual*, sau falsității eventuale, de la premise la concluzii. Altfel spus, logica relevă că are a se ocupa de nexul inferențial dintre enunțurile cu rol de premise sau supoziții și alte enunțuri, în calitate de concluzii ale acestora [13].

Antrenată în opera de explicitare, ierarhizare și integrare a demersurilor inferențiale aferente functorilor și claselor de functori logici, deducția naturală a putut deschide și o nouă concepție asupra *formei logice*, respectiv asupra *logicii*, ca știință care și-a asumat prin titulatură atributul formalității. Altceva decît un *a priori* al gîndirii sau al limbajului, cum a fost înțeleasă în atîtea rînduri, *forma* se revelează ca *abstracție*, în sensul că „nu poate fi sesizată decît într-o stare de separație[14]", în funcțiunea sa [15], și că „nu se face vizibilă decît în contextele în care operează"[16].

Critic de notorietate al formalismului logico-matematic contemporan, J. Ladrière intervine cu precizări esențiale pentru înțelegerea aportului deducției naturale. Se impune, între altele, ideea că noua tehnică ipotetico-deductivă conduce logica de la descrierea și conexarea formelor logice la explicarea acestora. „A arăta o formă, precizează logicianul de la Louvain, înseamnă a o face manifestă *ca operație*, a indica cum acționează asupra obiectelor la care se poate aplica" [17]. „Explicația în logică, se precizează în continuare, constă în eliminarea situațiilor opace grație unei analize de tip operatoriu"[18]. Este un proces prin excelență de „*urcare* spre formă" [19]. Iar dacă acest proces nu este străin axiomaticii uzuale, deducția naturală este cea care îl împlinește. Ea întruchipează în mod superior decantarea și interrelaționarea operațiilor *vi formae* ale gîndirii deductive.

2. Constructivism și standardizare

2.1. Sensurile demersului fundațional realizat prin deducția naturală: deductiv propriu-zis și reductiv. „Procedura abstractivă" [20] la care s-a făcut aluzie — decantarea rela-

ţiei de deductibilitate şi precizarea unui context formal în raport cu care se fixează sensul operaţiilor logice —, avansează considerabil analiza logico-formală.

Pe de o parte, se crează posibilitatea reducerii oricărei demonstraţii la demersuri elementare, „atomi de demonstraţie"[21], aşa cum se întîmplă exemplar în deducţia prin supoziţii, explicitată în calculul N al lui Gentzen, respectiv în calculul lui Jaśkowski.

Pe de altă parte, ca împrejurare complementară cu prima, metoda deducţiei naturale îngăduie exerciţiul invers, de reconstrucţie a unei demonstraţii, oricît de complexă, pornind de la „atomi de demonstraţie". Sub acest aspect s-a impus *constructivismul* axiomaticii fără axiome, fără legi sau teze în grupul postulatelor. În calculul L, căruia i se potriveşte nota de constructivism, demonstraţiile se prezintă ca un şir de introduceri ale semnelor de operaţie, în antecedentul sau în succedentul unor secvenţe, introduceri secondate de unele reorganizări ale rezultatelor obţinute, în acord cu regulile „structurale". Se poate spune că demonstraţia unui enunţ în calculul secvenţelor revine la *construcţia* lui din secvenţe fundamentale.

Promotorul deducţiei secvenţiale, G. Gentzen s-a raportat prin calculul N la logica intuiţionistă. Virtutea constructivismului l-a cucerit însă de o aşa manieră încît în calculul L a numit *fundamentală* teorema după care *regula tăieturii*, stipulînd sinteza prin cumulare selectivă între două secvenţe, este dispensabilă în economia unui calcul L[22]. Cum *tăietura*, adică eliminarea unor termeni comuni, dar cu poziţie diferită, din două secvenţe, nu este inevitabilă, rezultă posibilitatea de a demonstra o teză, sau concluzia unor premise prin reportarea şi complicarea progresivă a unor secvenţe iniţiale de formă $P \rightarrow P$. Se înaintează astfel, încît nici un pas intermediar al demonstraţiei să nu fie mai complicat decît concluzia. În absenţa tăieturilor, singura eliminare ar fi realizată prin contracţii, ceea ce nu afectează semnele de operaţii.

Constructivismul calculului L este mult mai accentuat decît în cazul N-deducţiei şi totuşi respectivul calcul L manifestă mai puţine afinităţi cu programul intuiţionist. Dovadă că în deducţia secvenţelor Gentzen nu mai reeditează surpriza de a obţine din regulile primitive o logică propoziţională restrictivă, aprehensivă faţă de terţul exclus. Experimentul proiectării în calculul secvenţelor a

logicii efective, restrictivă în raport cu axiomatizările clasice, logică la promovarea căreia se angajaseră intuiționiștii olandezi, avea să fie încercat după Gentzen, de către compatriotul său P. Lorenzen. Însușindu-și ingredientele deducției naturale — noțiunile de secvență, de reguli operatorii și de reguli structurale —, acesta înfiripă un formalism *sui-generis* al „strategiilor de cîștig" în dialogul dintre un propunător și un opozant [23].

Practic, fundamentarea unei teze sau a unei scheme de inferență în deducția naturală poate lua, în raport cu grupul axiomatic, cele două sensuri posibile : sensul *de-ductiv* propriu-zis, al înaintării de la *axiome* (normative, cum am convenit să numim regulile primitive în contextul eforturilor de unificare a procedurilor de sistematizare deductivă) la *teoreme* (fie ele teze sau tot scheme deductive), dar și sensul opus, *re-ductiv* sau *ab-ductiv*, de analiză a teoremei pînă la punctul detectării unor form standard, transparente la criteriul valabilității.

2.2. **Caracterul reductiv al metodei „tabelelor semantice" (Beth).** În *deducția naturală prin supoziții*, așa cum au consacrat-o Gentzen și Jaśkowski, cele două sensuri, deductiv și reductiv, se întrepătrund și alternează prin jocul regulilor de introducere și eliminare a operatorilor. Primul care a pus la punct o tehnică mai pronunțat (nu exclusiv !) reductivă, în perimetrul tezelor cît și al schemelor de inferență, este E. W. Beth [24]. De numele său se leagă metoda *tabelelor semantice* sau a *contra-modelelor*, o variantă semantică [25] a reducerii la absurd. O ilustrăm pe exemplele cele mai frecvente în expunerea noastră, teorema de asociativitate și comutativitate a disjuncției, respectiv modul inferențial *Cesare*.

Avem de demonstrat, în primul caz, formula propozițională implicativă $p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$. O presupunem falsă, adică încercăm să-i construim un *contra-model*. În supoziția făcută, urmează să asociem adevărul antecedentului implicației, $p \vee (q \vee r)$, cu falsitatea consecventului acesteia, $q \vee (p \vee r)$. Cum acesta din urmă este de formă disjunctivă, falsitatea se va răsfrînge asupra fiecărui termen, q și $p \vee r$. Al doilea termen al disjuncției

cu rol de consecvent fiind el însuşi de formă disjunctivă, revenim în final la falsitatea fiecărui enunţ atomar din consecventul implicaţiei. Or, dacă q, p şi r sînt false, negaţiile lor pot fi trecute la rubrica „adevărat", din stînga *tabelului semantic*. Cu enunţurile adunate aici putem realiza deducţii, conform regulilor acceptate axiomatic. Dacă în urma acestor demersuri toate instanţele subenunţului presupus fals vor figura şi la rubrica „adevărat", contra-modelul se dovedeşte vid, iar întregul enunţ îşi confirmă validitatea. Ceea ce se relevă în cazul nostru, prin *închiderea totală* a tabelului semantic :

Adevărat		Fals	
1. $p \vee (q \vee r)$		2. $q \vee (p \vee r)$	
7. $\bar{p}$	(5)	3. q	(2)
8. $q \vee r$	(1,7 :E ∨)	4. $p \vee r$	(2)
9. $\bar{q}$	(3)	5. p	(4)
10. r	(8,9 :E ∨)	6. r	(4)
11. $\bar{r}$	(6)		
12. q	(8,11 :E ∨)		
13. $\bar{q} \,\&\, \bar{r}$	(9,11 : I &)		
14. $-(q \vee r)$	(13 : Df. ∨ in.)		
15. p	(1,14 : E ∨)		

1	2	1	2
q (12)		q (3)	$p \vee r$ (4)

2.1	2.2	2.1	2.2
p (15)	r (10)	p (5)	r (6)

În afara supoziţiilor dictate de construcţia contra-modelului şi a marcării consecinţelor acestora, demonstraţia formulei exprimînd asociativitatea disjuncţiei vedem că angajează doar două reguli operatorii (de eliminare a *disjuncţiei* şi de introducere a *conjuncţiei*) şi o regulă definiţională (de introducere a *antidisjuncţiei*). Caracterul regresiv şi analitic al metodei tabelelor semantice este indicat de frecvenţa regulilor de eliminare a functorilor.

În exemplul nostru, singura intervenție a unei reguli *de introducere a unui functor* (13) și *regula definițională* care operează în succesiunea acesteia (14) nu fac decît să pregătească una din cele patru eliminări întreprinse.

În orizontul silogisticii inferențiale, existența unei *metode a antilogismului* [26] crează deja un termen de comparație pentru fixarea statutului semiotic al metodei lui Beth. Într-un caz ca și în celălalt pornim de la *contradictoria* concluziei silogismului testat și de la premisele acestuia, în cazul modului *Cesare* de la triada:

$$P \text{ e } M$$

$$S \text{ a } M$$

$$-(S \text{ e } P).$$

După traducerea celor trei enunțuri silogistice în limbajul logicii claselor și respectiv al logicii predicatelor:

$$P \cap M = 0 \qquad (\forall x)(P(x) \supset \bar{M}(x))$$

$$S \cap \bar{M} = 0 \qquad (\forall y)(S(y) \supset M(y))$$

$$S \cap P \neq 0 \qquad -(\forall z)(S(z) \supset \bar{P}(z))$$

avem prilejul să constatăm caracterul *strict semantic* al procedurii impuse de Christine Ladd-Franklin și ținuta *sintactico-semantică* a contra-modelului în concepția lui Beth. În primul caz, *antilogismul* transpus în logica claselor trebuie să întrunească un set de condiții. Din cele trei enunțuri, două să fie universale ($= 0$) și una particulară ($\neq 0$); cele două universale să aibă în comun un termen, sub semne diferite (pozitiv într-una, negativ în cealaltă); particulara să conțină termenii necomuni ai universalelor, cu semnele neschimbate. Ceea ce se întîmplă cu antilogismul modului *Cesare*. În al doilea caz, cele trei enunțuri ale *contra-modelului* crează baza unor *deducții*. Iar *închiderea* ca atare a tabelului așa-zis *semantic* presupune un efort *constructiv* și *euristic* în raport cu simpla aplicație a unui test algoritmic. Modul *Cesare* fiind cunoscut ca valid,

ne așteptăm ca tabelul care înscrie premisele la rubrica „adevărat" iar concluzia la „fals" să poată fi închis :

Adevărat	Fals
1. $(\forall x)\,(P(x) \supset \bar{M}(x))$	3. $(\forall z)\,(S(z) \supset \bar{P}(z))$
2. $(\forall y)\,(S(y) \supset M(y))$	4. $S(a) \supset \bar{P}(a)$ (3 : E∀)
5. $S(a)$ (4)	6. $\bar{P}(a)$ (4)
7. $S(a) \supset M(a)$ (2 :E ∀)	
8. $M(a)$ (7,5 : E ⊃)	
9. $P(a) \supset \bar{M}(a)$ (1 :E ∀)	
10. $\bar{M}(a)$ (8 :D.N.I.)	
11. $\bar{P}(a)$ (9,10 :E ⊃)	
$\bar{P}(a)$ (11)	$\bar{P}(a)$ (6)

Închiderea tabelului semantic corespunzător modului *Cesare* în traducerea predicațională s-a sprijinit, așadar, pe regula *de instanțiere* (eliminarea cuantificatorului universal) — în obținerea liniilor 4, 7 și 9 —, pe regulile *de eliminare a implicației (modus ponens* pentru obținerea liniei 8 și *modus tollens* pentru 11), respectiv pe regula *de introducere a dublei negații* (pentru linia 10). Natura atomară a enunțurilor silogistice, mai precis forma implicativă a concluziei explică închiderea totală a tabelului în contextul unei singure instanțe comune celor două rubrici. Altminteri, metoda tabelelor semantice, aplicabilă în același spirit schemelor de teze și schemelor de inferență, se relevă ca *metodă a reducerilor multiple la absurd*. Exigența închiderii tabelului semantic ne conduce la toate consecințele supoziției absurde. În calculul pe deplin sintactic al supozițiilor absurde am văzut că era suficientă descoperirea unui singur cuplu de enunțuri contradictorii, ca atare demonstrația putându-se realiza în maniere diferite, mai elegant sau mai laborios.

Caracterizarea demonstrației prin tabele semantice ca *reducere multiplă la absurd* ne permite raportarea mai exactă la variantele deducției naturale. În acest sens, ni se va părea nu numai vagă dar și improprie corespondența instituită de creatorul metodei în atenție între *tabelul semantic închis* al unui argument și derularea acestuia

în calculul deducției naturale. Vagă, pentru că nu intră în discuție decît *o variantă a deducției naturale* în calitate de termen comparativ al tabelului semantic, anume *deducția prin supoziții absurde*. Improprie, deoarece *reducerea indirectă* prestată prin cele două metode se exprimă și se motivează diferit. La această impresie ne conduce însăși comparația lui E. W. Beth realizată în contextul argumentului:

$$\frac{\begin{array}{l}(1)\ \overline{(\exists x)\,(M(x)\ \&\ P(x))} \\ (2)\ (\forall y)\,(S(y)\ \supset M(y))\end{array}}{(3)\ \overline{(\exists z)\,(P(z)\ \&\ S(z))}}$$

Reproducem întocmai *tabelul semantic* și demonstrația în *calculul deducției naturale* obținută de Beth „printr-o simplă realiniere a formulelor" acestuia [27]:

Adevărat	Fals
1. $\overline{(\exists x)\,(M(x)\&P(x))}$	3. $\overline{(\exists z)\,(P(z)\&S(z))}$
2. $(\forall y)\,(S(y)\supset M(y))$	5. $(\exists x)\,(M(x)\&P(x))$ (vezi 1)
4. $(\exists z)(P(z)\&S(z))$ (vezi 3)	10. $M(a)\&P(a)$ (vezi 5)
6. $P(a)\ \&\ S(a)$ (vezi 4)	
7. $P(a)$ (vezi 6)	
8. $S(a)$ (vezi 6)	
9. $S(a)\supset M(a)$ (vezi 2)	

1	2	1	2
		11. $M(a)$ (10)	12. $P(a)$ (10)

11	12	11	12
	14. $M(a)$ (9)	13. $S(a)$ (9)	

1.	$\overline{(\exists x)\,(M(x)\ \&\ P(x))}$	(prem. 1)
2.	$(\forall y)\,(S(y)\ \supset\ M(y))$	(prem. 2)
4.	$(\exists z)\,(P(z)\ \&\ S(z))$	(+ ip. 1)
6.	$P(a)\ \&\ S\,(a)$	(+ ip. 2)

7.	$P(a)$	(6)
8.	$S(a)$	(6)
9.	$S(a) \supset M(a)$	(2)
14.	$M(a)$	(8,9)
10.	$M(a) \& P(a)$	(14,7)
5.	$(\exists x)(M(x) \& P(x))$	(— ip. 2)
3.	$(\exists z)(P(z) \& S(z))$	(— ip. 1)

Ce constatăm? *Contramodelul* argumentului dat este declarat vid odată cu închiderea totală a tabelului, adică odată cu reperarea instanțelor $P(a)$, $S(a)$ și $M(a)$ de ambele părți ale barei verticale, la rubrica „adevărat" ca și la rubrica „fals". A se compara (12) cu (7), (13) cu (8) și (11) cu (14). În *deducția naturală* reconstituită de Beth în baza tabelului, supoziția absurdă privind nevaliditatea concluziei argumentului (vezi 4) este respinsă deîndată ce s-a obținut cuplul de formule contradictorii (1) și (5), prin derivarea unei antipremise.

2.3. **Adaptarea abducției prin tabele semantice la domeniul secvențelor.** *Metoda tabelelor semantice* în varianta creatorului acesteia, E. W. Beth, nu este nici mai algoritmică și nici mai scurtă decît *deducția naturală indirectă*, pentru a o pune în serviciul acesteia în calitate de călăuză și instrument de control. Mult mai oportună s-a dovedit căutarea incidențelor acestei proceduri de închidere a tabelului semantic cu *deducția secvențială*. Ne referim de această dată la procedeul lui J. J. Zeman [28], care, printr-o nouă figurație, reușește să dea construcției contra-modelului sensul strict al *reducerii* formulei de demonstrat (intențiile autorului se limitează la domeniul tezelor propoziționale, reclamat de logica modală). Algoritmul procedurii lui Zeman indică, în acest scop, modalitățile de eliminare a functorilor în beneficiul proliferării tabelului[29]. Astfel:

C-s: Dacă $C\ \alpha\beta$ se găsește în stînga tabelului semantic, divide tabelul, scriind pe α în dreapta unuia din tabelele rezultate, iar pe β în stînga celuilalt.

C-d: Dacă $C\ \alpha\ \beta$ se află în dreapta tabelului semantic, scrie pe α în stînga iar pe β în dreapta tabelului.

K-s : Dacă $K\ \alpha\ \beta$ se află în stînga tabelului semantic, se scriu atît α cît și β în stînga tabelului.

K-d : Dacă $K\ \alpha\ \beta$ este situat în dreapta tabelului semantic, se va divide tabelul scriind pe α în dreapta unuia din tabelele rezultate iar pe β în stînga celuilalt.

A-s : Dacă $A\ \alpha\ \beta$ se află în stînga tabelului, se divide tabelul scriind pe α în stînga unuia din tabelele rezultate iar pe β în stînga celuilalt.

A-d : Dacă $A\ \alpha\ \beta$ se găsește în dreapta tabelului semantic, se scriu atît α cît și β în dreapta tabelului.

N-s : Dacă $N\alpha$ se află în stînga tabelului semantic, se scrie α în dreapta.

N-d : Dacă $N\ \alpha$ se află în dreapta tabelului semantic, se scrie α în stînga acestuia.

Figurînd indicațiile autorului [30], obținem următoarele reguli *sui-generis* de construcție a sistemului de tabele semantice pentru o formulă propozițională :

$$\frac{C\ \alpha\ \beta}{\alpha \quad \beta}\ (C\text{—s}) \qquad \alpha \,\Big|\, C\ \alpha\ \beta \,\Big|\, \beta\ (C\text{—d})$$

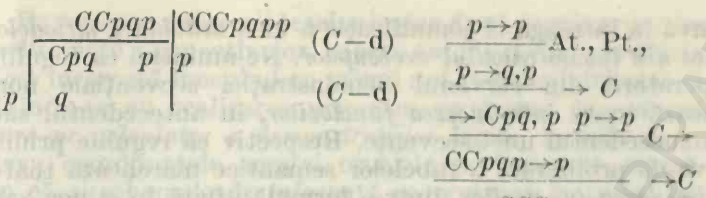
$$K\ \alpha\ \beta \,\Big|\, \alpha \,\Big|\, \beta\ (K\text{—s}) \qquad \Big|\, \frac{K\ \alpha\ \beta}{\alpha \quad \beta} \,\Big|\ (K\text{—d})$$

$$A\ \alpha\ \beta \,\Big|\, \alpha \,\Big|\, \beta\ (A\text{—d}) \qquad \frac{A\ \alpha\ \beta}{\alpha \,\Big|\, \beta}\ (A\text{—s})$$

$$N\ \alpha \,\Big|\, \alpha\ (N\text{—s}) \qquad \alpha \,\Big|\, N\ \alpha\ (N\text{—d})$$

Iată acum exemplele autorului, în notația poloneză folosită de acesta, și replicile acestora în calculul secvențial :

	CK*pq*C*rq*		$\dfrac{q \to q}{}$	At.
K*pq*	C*rq*	(*C*—d)	$\dfrac{r,p,q \to q}{}$	$\to C$
p		(*K*—s)	$\dfrac{p,q \to Crq}{}$	$K\to$
q		(*K*—s)	$\dfrac{Kpq \to Crq}{}$	$\to C$
r	*q*	(*C*—d)	$\to CKpqCrq$	



Pentru enunțul nostru exemplificator:

		CA*p*A*qr*A*q*A*pr*
	A*p*A*qr*	A*q*A*pr* (*C*—d)
p	A*qr*	*q* (A—s; *A*—d)
q	*r*	A*pr* (*A*—s; *A*—d)
		p (*A*—d)
		r (*A*—d)

Metoda tabelelor semantice întruchipează în versiunea lui Zeman o ordine strict *reductivă*, ceea ce-i acordă o ținută algoritmică. Construcția sistemului de tabele semantice se realizează în pas cu eliminarea functorilor pînă la obținerea propozițiilor atomare. Ca *procedură de decizie*, închiderea sistemului de tabele semantice va marca *posibilitatea demonstrației* formulei inițiale, iar demonstrația ca atare va urma *procesul invers*, al introducerii succesive a functorilor propoziționali. Pe drept cuvînt vom spune că *închiderea sistemului de tabele semantice* și *demonstrația secvențială*, pe scurt, *decizia* și *demonstrația*, revin acum la demersuri care nu diferă decît prin sensul operatoriu, *analitic* și *regresiv* într-un caz (eliminări de functori), *sintetic* și *progresiv* în celălalt caz (introduceri de functori).

2.4. **Decizia prin demonstrație și automatizarea demersului fundațional.** Remarcabila comuniune dintre *decizia prin tabele semantice* (varianta Zeman) și *demonstrația secvențială* nu merge pînă la anularea diferenței de statut metodologic dintre cele două demersuri. În primul caz avem de-a face cu o *procedură sintactico-semantică* dacă nu chiar *semantică*[31], în al doilea caz cu o *manieră pur sintactică de sistematizare ipotetico-deductivă*. Confruntarea de mai sus nici nu și-ar fi avut dealtfel rostul în contextul *formelor axiomaticii* dacă n-ar fi pregătit recep-

tarea în întreaga ei semnificaţie a unei *dedublări metodologice din însuşi calculul secvenţelor*. Ne amintim că regulile operatorii din serviciul demonstraţiei secvenţiale normează toate *introducerea functorilor*, în antecedentul sau în succedentul unei secvenţe. Respectiv că regulile primitive de proliferare a tabelelor semantice marchează toate *eliminarea functorilor* dintr-o formulă aflată în stînga sau în dreapta tabelului iniţial. Ei bine, ce-ar fi dacă am folosi în ordine inversă regulile operatorii din calculul secvenţelor? Ar deveni toate reguli *de eliminare* care, aplicate asupra unei formule de demonstrat, ne-ar conduce, după un număr finit de paşi, la secvenţe *elementare* de forma $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$, unde A_i şi B_j sînt formule atomare. Astfel de secvenţe sînt demonstrabile dacă au în antecedent şi în succedent cel puţin o formulă atomară comună. Dacă toate secvenţele elementare obţinute prin eliminare succesivă a functorilor sînt demonstrabile, va fi demonstrabilă şi secvenţa iniţială, corespunzătoare formulei date. Pentru demonstraţia propriu-zisă va fi suficient să reluăm, în ordine inversă, toţi paşii care au permis obţinerea secvenţelor elementare.

Revenind încă o dată la formula cu care ne-am ilustrat pe parcursul inventarului formelor axiomaticii, obţinem următorul text demonstrativ :

1. $pv(qvr) \supset qv(pvr)$ — teoremă de demonstrat ;
2. $\rightarrow pv(qvr) \supset qv(pvr)$ — secvenţă corespunzătoare ;
3. $pv(qvr) \rightarrow qv(pvr)$ — din 2, prin E $\supset$ s ;
4. $pv(qvr) \rightarrow q,pvr$ — din 3, prin E v s ;
5. $pv(qvr) \rightarrow q,p,r$ — din 4, prin E v s ;
6. $p \rightarrow q,p,r$ (VALIDĂ) — din 5, prin E v a ;
7. $qvr \rightarrow q,p,r$ — din 5, prin E v a ;
8. $q \rightarrow q,p,r$ (VALIDĂ) — din 7, prin E v a ;
9. $r \rightarrow q,p,r$ (VALIDĂ) — din 7, prin E v a.

Toate secvenţele elementare fiind valide, este validă şi secvenţa iniţială, deci *demonstrabilă* formula pe care o exprimă.

Experienţa *reducerii* tezelor logice după reguli primitive de eliminare a conectivelor, la care am făcut mai sus aluzie, a fost încercată începînd cu primii ani ai deceniului şase [32], soldîndu-se cu realizarea primelor programe de *automatizare pe calculator a demonstraţiilor logice*. Înainte de a releva coordonatele acestei cruciale performanţe, semnalăm că şi schemele de inferenţă se pretează la testul *ab-ductiv* realizat cu ajutorul regulilor primitive de eliminare. Este suficient să dăm curs pentru aceasta intuiţiei originare din calculul secvenţelor, asimilînd schema deductivă de forma :

$$\frac{\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{array}}{B}$$

cu secvenţa $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ şi să pornim din acest punct eliminarea conectivelor din antecedentul şi succedentul acesteia. Cu titlu de exemplu luăm schema deductivă a *dilemei simple constructive* :

$$\frac{\begin{array}{c} p \supset r \\ q \supset r \\ p \vee q \end{array}}{r}.$$

Analiza ab-ductivă va porni în acest caz de la secvenţa :

$$1.\ p \supset r,\ q \supset r,\ p \vee q \rightarrow r.$$

Schema deductivă fiind cunoscută ca validă, ne aşteptăm ca toate secvenţele elementare derivate din (1) să fie valide. Într-adevăr :

2. $r,\ q \supset r,\ p \vee q \rightarrow r$ — din 1, E $\supset$ a;

3. $q \supset r,\ p \vee q \rightarrow r, p$ — din 1, E $\supset$ a;

4. $r, r, p \vee q \rightarrow r$ — din 2, E $\supset$ a;

5. $r, p \vee q \rightarrow r, q$ — din 2, E $\supset$ a;

6. $r, p \vee q \rightarrow r, p$ — din 3, E $\supset$ a;
7. $p \vee q \rightarrow r, p, q$ — din 3, E $\supset$ a;
8. $r, r, p \rightarrow r$ (VALIDĂ) — din 4, E v a;
9. $r, r, q \rightarrow r$ (VALIDĂ) — din 4, E v a;
10. $r, p \rightarrow r, q$ (VALIDĂ) — din 5, E v a;
11. $r, q \rightarrow r, q$ (VALIDĂ) — din 5, E v a;
12. $r, p \rightarrow r, p$ (VALIDĂ) — din 6, E v a;
13. $r, q \rightarrow r, p$ (VALIDĂ) — din 6, E v a;
14. $p \rightarrow r, p, q$ (VALIDĂ) — din 7, E v a;
15. $q \rightarrow r, p, q$ (VALIDĂ) — din 7, E v a;

Totuşi, secvenţa $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ redă chiar schema deductivă sau legea corespunzătoare acesteia, $A_1 \& \ldots \ldots \& A_m \supset B$? Pentru a nu afecta de nici un dubiu aplicabilitatea *procedeului ab-ductiv* la cazul schemelor deductive înseşi, precizăm şi o a doua variantă, mai directă, a *reducerii premiselor la concluzie.* În exemplul nostru:

$\rightarrow p \supset r$ — premisă $\rightarrow q \supset r$ — premisă $\rightarrow p \vee q$ — premisă

$p \rightarrow r$ — E $\supset$ s $\quad q \rightarrow r$ — E $\supset$ s $\rightarrow p, q$ — E v s

$\rightarrow p, r$ — Tăietură

$\rightarrow r, r$ — Tăietură

$\rightarrow r$ — Contracţie

Se va remarca în această alternativă a reducerii ab-ductive transparenţa *sintezei deductive,* construcţia efectivă a concluziei din premise. Adică demonstraţia schemei deductive în sensul cel mai propriu al cuvîntului.

În ambele orizonturi teleo-logice, *ab-ducţia* secvenţială întruchipează standardizarea maximă a procesului fundaţional. În logica propoziţiilor şi chiar în unele extensii ale acesteia *analiza inferenţială* pe care am ilustrat-o ma-

nifestă caracteristici algoritmice ce merg pînă la *realizarea mecanică a demonstrației* teoremelor cunoscute și chiar la *demonstrarea de noi teoreme*, propuse ca atare de calculator, în acord, desigur, cu niște criterii de nebanalitate înscrise de programator. Asistăm, în același timp, la fuziunea celor două demersuri metodologice din logica formalizată: *decizia* și *demonstrația*. Pentru a nu lăsa loc confuziei, precizăm că este vorba de impunerea unui procedeu *sintactic* de decizie. Sintactic, pentru că se sprijină exclusiv pe regulile operatorii din calculul secvențelor, care, odată introduse ca scheme primitive, nu mai necesită referințe nici la definiția funcțională a conectivelor, înscrisă în *tabelele de adevăr* aferente acestora, nici la vreun *model* al acestora în domeniile prezidate de calcul. Să ne explicăm. Decizia prin *tabelele semantice*, deși în varianta promotorului acesteia antrenează regulile operatorii de deducție, este susținută pe considerații semantice, avansînd prin analiza alternativelor în care *poate fi falsă o formulă*. Regulile de proliferare a tabelului semantic pe care le formulează Zeman normează tocmai asemenea împrejurări. E drept că în varianta autorului din urmă închiderea tabelului semantic nu necesită pe parcurs nici o deducție. Decizia și demonstrația rămîn în acest caz demersuri paralele, normate prin sisteme de reguli diferite.

Decizia obișnuită, prin *calculul matriceal al formulelor*, nici nu mai necesită comentarii în privința ținutei sale *semantice*, cel puțin atît cît îngăduie acestui orizont analiza formală. Normele care călăuzesc acest demers metodologic sînt însești definițiile matriciale ale conectivelor. Pentru cazul enunțului de asociativitate și comutativitate a *disjuncției*, păstrat mereu ca termen de comparație, e nevoie de matricea disjuncției și de cea a implicației:

$\vee$	A	F
A	A	A
F	A	F

$\supset$	A	F
A	A	F
F	A	A

p	A	A	A	A	F	F	F	F
q	A	A	F	F	A	A	F	F
r	A	F	A	F	A	F	A	F
$q \vee r$	A	A	A	F	A	A	A	F
$p \vee r$	A	A	A	A	A	F	A	F
$p \vee (q \vee r)$	A	A	A	A	A	A	A	F
$q \vee (p \vee r)$	A	A	A	A	A	A	A	F
$p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$	A	A	A	A	A	A	A	A

Decizia prin *normalizarea expresiilor formale*, realizată în logica propoziţională în baza regulilor de interdefiniţie a conectivelor, de negaţie şi de distributivitate a acestora, concentrează testul semantic la cazul disjuncţiilor de conjuncţii (pentru antilogii) şi al conjuncţiilor de disjuncţii (pentru tautologii). O formulă este declarată tautologică şi exprimă o lege în logica propoziţională atunci şi numai atunci cînd forma sa *normal-conjunctivă* conţine în fiecare factor-disjuncţie cel puţin un termen sub semne diferite, adică cel puţin o propoziţie oarecare dimpreună cu negaţia sa. Ceea ce este cazul şi cu enunţul nostru exemplificator :

1. $p \vee (q \vee r) \supset q \vee (p \vee r)$
2. $-(p \vee (q \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r))$
3. $(\bar{p} \,\&\, (-(q \vee r))) \vee (q \vee (p \vee r))$
4. $(\bar{p} \,\&\, (\bar{q} \,\&\, \bar{r})) \vee (q \vee (p \vee r))$
5. $(\bar{p} \vee (q \vee (p \vee r))) \,\&\, (\bar{q} \vee (q \vee (p \vee r))) \,\&\, (\bar{r} \vee (q \vee (p \vee r)))$

Semantică este şi *decizia algebrică*, chiar dacă prin ţinuta calculabilă şi mecanizabilă manifestă cele mai strînse afinităţi cu analiza ab-ductivă facilitată de regulile de eliminare din secvenţe a operatorilor. Statutul semantic este marcat de această dată de însăşi ideea *reprezentării* sau *modelării* algebrice a operaţiilor logice. Principiul director al deciziei algebrice este prescris de următoarea teoremă : o expresie propoziţională $f(p_1, \ldots, p_n)$ este tautologică dacă şi numai dacă *polinomul* său echivalent $W(p_1, \ldots, p_n)$ este identic egal cu 1. În afara ecuaţiilor de reprezentare algebrică a conectivelor propoziţionale,

expresia propoziţională	*polinomul echivalent*
$p \vee q$	$p + q - pq$
$p \supset q$	$1 - p(1 - q)$
etc.	

se va ţine cont, în calculul polinomului, de relaţiile :

$$x^{2k} = x; \qquad x^{2k+1} = x,$$

caracteristice algebrei binare aferente logicii propoziţiilor [33]. Ne ilustrăm iarăşi în cazul enunţului de asociativitate şi comutativitate a disjuncţiei :

$$W(p, q, r) = 1 - (p \vee (q \vee r))\,(1 - (q \vee (p \vee r))) =$$
$$= 1 - (p + (q \vee r) - p(q \vee r))\,(1 - (q + (p \vee r) -$$
$$- q(p \vee r))) = 1 - (p + q + r - qr - pq - pr +$$
$$+ pqr)\,(1 - (q + p + r - pr - pq - qr + pqr)) =$$
$$= 1 - (p + q + r - pq - pr - qr + pqr) + (p + q +$$
$$+ r - pq - pr - qr + pqr)^2 = 1$$

Faţă de toate aceste procedee ale deciziei în logica propoziţiilor, care pot *anticipa posibilitatea găsirii unei demonstraţii* sau pot *controla rezultatul demonstraţiei înfăptuite*, decizia ab-ductivă facilitată de folosirea inversată a regulilor operatorii din calculul secvenţelor are avantajul de *a indica efectiv mersul demonstraţiei unei teoreme*. Tocmai joncţiunea dintre *decizie* şi *demonstraţie*, respectiv dintre *de-ducţie* şi *ab-ducţie*, în contextul unui sistem unic de reguli primitive operatorii, consacrarea „deciziei prin demonstraţie" [34], aceasta a permis antrenarea computerului la fundamentarea tezelor logice. În logica propoziţiilor se pot construi, desigur, şi proceduri demonstrative mai eficiente, dar cea la care ne referim, în ţinuta algoritmică trasată de *analiza ab-ductivă prin eliminarea conectivelor*, îngăduie generalizări pentru calculul predicatelor, unde nu este posibilă o metodă universală de decizie (cf. teorema lui Church de irezolubilitate a problemei rezolubilităţii).

„Croitoraşul cel viteaz : şapte (muşte) dintr-o lovitură. I. B.M. 704 :220 teoreme (din calculul propoziţional) în trei minute". Aceasta este deviza sub care luăm cunoştinţă de programul lui Hao Wang [35] care permite *decizia şi demonstraţia automată* a tezelor din logica propoziţională. Întreaga listă a teoremelor din primele cinci capitole ale lucrării de referinţă *Principia Mathematica* (220 inclusiv cu axiomele şi definiţiile, care se cer demonstrate în deducţia naturală) a solicitat calculatorului numeric universal întrebuinţat de H. Wang doar 37 de minute, în condiţiile în care 12/13 din timp s-a cheltuit cu introduce-

rea datelor și extragerea rezultatelor (intrările și ieșirile). Redăm două exemple de teoreme propoziționale tipărite după programul I întocmit de H. Wang și traducerea textului imprimat în limbajul curent al logicii formale [36] :

2*31/$DP.DQR-DPQ,R$	1 2* 31.	$Pv(QvR)\rightarrow PvQ,R$
1/$P-DPQ,R$	2 (1)	$P\rightarrow PvQ,R$
2/$P-P,Q,R$	3 (2)	$P\rightarrow P, Q, R$
VALID	3	VALID
1/$DQR-DPQ,R$	4 (1)	$QvR \rightarrow PvQ, R$
4/$Q-DPQ, R$	5 (3)	$Q \rightarrow P$ v Q, R
5/$Q-P, Q, R$	6 (4)	$Q \rightarrow P, Q, R$
VALID		VALID
4/$R-DPQ, R$	7 (3)	$R \rightarrow P$ v Q, R
7/$R-P,Q,R$	8 (5)	$R \rightarrow P, Q, R$
VALID	8	VALID
	Q.E.D.	
4*45/$-BP..CP.DPQ$	1 4*45.	$\rightarrow P \cdot \equiv P$ & & $(P$ v $Q)$
1/$P-CP\cdot DPQ$	2 (1)	$P\rightarrow P$ & $(P$ v $Q)$
2/$P-P$	3 (2)	$P \rightarrow P$
VALID	3	VALID
2/$P-DPQ$	4 (2)	$P \rightarrow P$ v Q
4/$P-P, Q$	5 (3)	$P \rightarrow P, Q$
VALID		VALID
1/$CP \cdot DPQ-P$	6 (1)	P & $(PvQ)\rightarrow P$
6/$P, DPQ-P$	7 (4)	P, P v $Q \rightarrow P$
7/$P,P-P$	8 (5)	$P, P \rightarrow P$
VALID	8	VALID
7/$P, Q-P$	9 (5)	$P, Q \rightarrow P$
VALID		VALID
Q.E.D.		

Al doilea program al lui Hao Wang instruiește calculatorul să formeze el singur formule cu ajutorul semnelor din „alfabet", respectiv să selecteze din formulele construite pe cele care reprezintă teoreme nebanale. Viteza de lucru a calculatorului a fost astfel încît peste 14 000 de

formule au putut fi formulate și testate într-o oră, dintre care aproximativ o mie tipărite ca teoreme, în maniera :

$$/-BDPR.R,CDPQ.P$$
$$/CCPQ.R-BIPR.P$$
$$/CCPQ.P-BIPR.R$$

etc. [37]

Rezultatele programului II nu s-au dovedit, totuși, concludente. În sensul că nu dispunem de un criteriu suficient pentru nebanalitatea formulelor. Este interesantă o teoremă care intervine *frecvent*? „Dacă nu avem din capul locului o normă acceptabilă pentru ordonarea demonstrațiilor care trebuie să fie obținute, este greu să justificăm pe această cale afirmația că anumite teoreme sînt interesante" [38]. În opinia lui Hao Wang mai stabilă ar fi „*adîncimea*" teoremei. Vor conta în acest caz formulele scurte, care necesită, însă, demonstrații lungi. Pentru definiții expresiile scurte, dar echivalente cu expresii lungi [39]. După Gluškov, stabilirea unor criterii și mai naturale, care să coincidă cu reprezentările obișnuite asupra nebanalității teoremelor, devine posibilă, dacă procesul de triere a noilor teoreme și a demonstrațiilor aferente urmează principiile autoorganizării. „Complexitatea unei teoreme se evaluează natural prin numărul minim de pași prin care putem obține demonstrația. Vom denumi propoziții nebanale axiomele inițiale și toate teoremele a căror complexitate depășește un anumit prag dinainte hotărît. Orice propoziție nebanală nou demonstrată se adaugă la sistemul de axiome, după care are loc o reevaluare a complexității tuturor teoremelor obținute anterior. Eliminînd din sistemul de axiome teoremele devenite banale, căutăm apoi o nouă teoremă nebanală, o adăugăm la sistemul de axiome eliminînd din nou teoremele devenite banale etc." [40]. O astfel de abordare a construcției teoriilor deductive se răsfrînge în chip direct asupra problemei decidabilității.

Memoriul lui Hao Wang asupra *matematicii mecanice* comentează și un al treilea program, destinat automatizării *calculului predicatelor*. Generalizînd procedura demonstrativă din calculul propozițiilor, prin antrenarea, în ordinea inversată, a schemelor de cuantificatori, ca și prin adiționarea unor procedee specifice acestui nivel al ana-

lizei logice, autorul reuşeşte să obţină la calculator 139 din cele 158 de teoreme (inclusiv axiomele şi definiţiile) configurînd *calculul predicatelor cu egalitate* din *Principia* lui Russell şi Whitehead. Cu anumite modificări, programul III este estimat de autorul său ca apt să permită demonstrarea tuturor teoremelor predicaţionale din lucrarea de referinţă pe care am invocat-o [41].

Desigur, *analiza inferenţială* aşa cum este concepută de Hao Wang, ca „asociat mai tînăr al analizei numerice"[42], căreia am preferat să-i spunem analiză *ab-ductivă*, această *decizie prin demonstraţie* se va dovedi mult mai eficientă în domeniile logicii unde există proceduri de decizie, dar sînt prea lungi pentru a fi aplicate curent (cazul *calculului propoziţional intuiţionist*, sau al celui *modal*). *Calculul predicatelor* şi extensiunile acestuia fiind principial indecidabile, nu pot fi concepute decît programe parţiale, corespunzătoare claselor speciale de formule decidabile.

Experimentele inaugurate de Hao Wang se deschid, totuşi, cu unele corective serioase pentru filosofia faptelor de limitare. Şi-aceasta prin faptul că analiza „inferenţială" abordează problema deciziei şi demonstraţiei nu sub semnul posibilităţii teoretice, ci al realizabilităţii practice. „Adesea, precizează Hao Wang, unele probleme particulare dintr-un domeniu nedecidabil se rezolvă mai uşor decît anumite probleme dintr-un domeniu decidabil, chiar cu ajutorul maşinii (..). În afară de aceasta, deocamdată încă nu este suficient de clar cît de mari sînt subdomeniile decidabile din cutare sau cutare domeniu nedecidabil (de exemplu, calculul predicatelor). Mai mult, chiar într-un domeniu nedecidabil, problema de a găsi o demonstraţie pentru o propoziţie cunoscută ca o teoremă sau de a formaliza o schemă detaliată este decidabilă" [43]. Pertinente sînt în acest sens şi consideraţiile lui Glušков. „Pe plan teoretic, afirmă autorul sovietic, este important, în primul rînd, însuşi faptul existenţei sau inexistenţei unei proceduri de decizie pentru cutare sau cutare clasă de formule. Procedurile de decizie construite în acest scop sînt, în majoritatea cazurilor, cu totul inadecvate pentru automatizarea demonstraţiilor teoremelor, deoarece conduc la construcţii prea greoaie şi prea lungi. Dimpotrivă, cînd abordăm practic construirea procedurilor de decizie, atenţia principală se acordă rapidităţii şi uşurinţei realizării acestor proceduri. Totodată, adesea ne împăcăm cu

faptul că procedura de decizie astfel construită nu îmbrățișează absolut toate formulele clasei considerate, cu condiția ca, în aplicațiile practice, cazurile cînd ea nu ne dă răspuns (într-un anumit timp dinainte fixat) să fie relativ rare. Așadar, procedurile de decizie practice pot să fie și numai *cuasidecisive*, nu decisive în sensul propriu" [44].

Se consideră că un limbaj artificial interesant nu trebuie să fie excesiv de artificial. Or, *calculul predicatelor*, ca limbaj artificial, nu reprezintă un scop în sine. Este chemat să exprime logica subiacentă teoriilor din științe. Decidabilitatea sa urmează a fi apreciată practic, în spațiul teoriilor pe care le formalizează. Dacă în matematică, de pildă, nu există o metodă universală de decizie, standardizarea demersurilor fundaționale prin concursul *deducției naturale* a permis, totuși, preluarea de către mașini a unei părți considerabile din operațiile care afectează timpul de cercetare al specialiștilor [45]. Ceea ce confirmă și motivează eforturile logicii formale *toto genere*.

De la apariție, *deducția naturală* s-a identificat strădaniei de a conjuga logica formală cu fundamentele științei, în primul rînd ale matematicii. În sensul reductiv al *deciziei prin demonstrație*, deducția naturală constituie un argument a cărui greutate teoretică și practică este de necontestat în aprecierea favorabilă a diversificării axiomaticii logice.

3. Generalizare metodologică și unificare teleologică

Tabloul *formelor axiomaticii*, prezentat în capitolul precedent, ne-a pus în fața unei constatări paradoxale. La același rezultat — fundamentarea sistemului de legi — logica parvine prin intermediul unora din legi, asumate ca axiome, și al unor reguli primitive de deducție, sau exclusiv în baza unor reguli de deducție. Dedublarea axiomaticii logice învederează astfel ascendentul metodologic al *regulii (schemei) deductive* în raport cu *legea*. Unii autori au văzut și în aceasta semnul artificialității elaborărilor formal-deductive, o nouă expresie a contrastului dintre *logica-„substanță"* și *logica-„calcul"*. Literatura de specialitate a înregistrat rezerve și chiar reacții defavorabile la

adresa deducției care s-a voit naturală. Dacă Gentzen, creatorul noului stil de sistematizare deductivă, avea convingerea că a introdus în demonstrații *ordinea genealogică*[46], în ochii altui logician de formație matematică respectivul procedeu deductiv „suferă de aceleași defecte ca și deducția « sistemică », nu este ierarhică (..) și nu cuprinde ideea de teorie, de cunoaștere imediată a unor principii"[47].

Dintr-o perspectivă integratoare asupra deducției, P. Botezatu intervine cu noțiunea clarificatoare de *antinomie metodologică*. Fiecare versiune a deducției axiomatice întrunește calități care o fac dezirabilă în fundamentarea științei. Performanțele dobîndite nu pot fi etalate însă de un singur procedeu deductiv. Astfel încît „ni se impune să alegem între a revela structura teoriei și a dezvălui structura demonstrației, fără putința de a cuceri concomitent ambele redute"[48]. Raportată la metoda deducției în ansamblu, împrejurarea nu trebuie pusă sub semnul eșecului. Dimpotrivă, s-o luăm ca manifestare remarcabilă a unei libertăți metodologice, de vreme ce „aceeași teorie poate fi desfășurată și după un model și după celălalt", ca „teorie-substanță", respectiv ca „manieră de creștere"[49].

Adăugăm, la precizările menționate, că impunerea deducției naturale are numai aparent semnificația unei *dedublări axiomatice*. Prin sistemele *L*-deducției (calculul secvențelor), logica parvine la o *generalizare metodologică*, la o anvergură care se răsfrînge inclusiv în spațiul teoretic, deschizînd calea *unificării teleologice* a științei care se revendică de la studiul formelor gîndirii.

Spunem *generalizare metodologică*, întrucît deducția naturală are același țel ca și axiomatica *stricto sensu* — *sistematizarea deductivă* sau cosubordonarea teoremelor la un grup de postulate. Atît doar, că în prestația sa fundațională deducția naturală nu mai articulează teze și reguli deductive, ci procedează exclusiv în baza regulilor operatorii și structurale primitive.

Introducem noțiunea de *unificare teleologică* în condițiile posibilității de integrare și generalizare a entităților logice fundamentale, *teza* sau forma propozițională validă și *schema de inferență*, în matricea acesteia din urmă.

Pasager, am remarcat cum axiomele din sistemele formale curente pot fi tratate ca „formule derivabile imediat din clasa vidă" (P. Botezatu[50]) sau ca *nullary rules*, fără

nici o premisă, producînd o concluzie *ab initio* (J. Corcoran[51]). Ideea revine şi la Kleene : „Schemele noastre de axiome pot fi considerate ca reguli de inferenţă. Pentru acest motiv Carnap a numit în 1934 schemele de axiome şi regulile de inferenţă în mod indistinct „reguli de transformare"[52]. Reluînd un termen introdus de C. S. Peirce pentru relaţii, am putea numi schemele de axiome *reguli deductive medadice*, cu zero premise.

În calculul secvenţelor, nu numai axiomele, ci toate tezele unui sistem formal (şi de fapt toate sînt acum teoreme!) apar drept cazuri-limită ale *secvenţelor*, care, în forma lor generală, transfigurează ideea de deducţie sau inferenţă, inclusiv în înţelesul originar, aristotelic, de sinteză „în care dacă ceva a fost dat, altceva decît datul urmează cu necesitate din ceea ce a fost dat"[53]. Şi nu numai că devin *secvenţe* deopotrivă tezele propoziţionale şi schemele de inferenţă, dar însăşi schema de inferenţă dobîndeşte un înţeles mai cuprinzător. În forma lor completă, secvenţele îngăduie exprimarea situaţiilor în care acelaşi grup de premise conduce la concluzii diferite, ceea ce se întîmplă în silogistică, de pildă, în cazul modurilor subalterne. În loc să mai exprimăm două moduri distincte, *Barbara* şi *Barbari*, să spunem :

$$\frac{\begin{matrix} MaP \\ SaM \end{matrix}}{SaP}, \text{ respectiv } \frac{\begin{matrix} MaP \\ SaM \end{matrix}}{SiP},$$

putem exprima într-o secvenţă modul complex *Barbarai* :

$$MaP,\ SaM \rightarrow SaP,\ SiP.$$

Interpretarea asociată secvenţelor sancţionează cerinţa fundamentală ca premisele unei inferenţe să asigure *condiţia necesară* a concluziilor, iar concluziile să reprezinte *consecinţa suficientă* a premiselor. Aceasta întrucît virgulile care despart antecedenţii au semnificaţia unei *conjuncţii* sau coadeveriri necesare, iar cele dintre succedenţi marchează *disjuncţia* sau excluderea cofalsităţii acestora. Intuitiv, deci, secvenţa trebuie înţeleasă ca implicaţie între conjuncţia antecedenţilor şi disjuncţia succedenţilor.

În economia formalismului, noțiunea de secvență aspiră la rolul *relației de deductibilitate*. În orice caz, Gentzen, creatorul *L*-deducției, se înscrie ferm pe drumul tatonat de C. I. Lewis cu mijloacele logicii modale[54] și de toți reformatorii *relației de implicație* care i-au urmat logicianului american[55], în intenția promovării logicii ca *vehicul și canon al inferenței deductive*. Autorul german are meritul de a fi creat un formalism care abordează deducția și demonstrația deductivă la un nivel suficient de abstract pentru a-l aplica și sistemului implicației „materiale", și sistemului implicației „stricte", și oricărei alte teorii logice a implicației. În deducția naturală se relevă ținuta intra-propozițională a relației de *implicație*, faptul că asemenea celorlalte conective (funcții, operații), ea *creează* propoziții din alte propoziții, fie acestea „atomare", simple, sau deja „moleculare", alcătuite, la rîndu-le, din alte propoziții. În schimb, *deductibilitatea* ne apare ca relație inter-propozițională prin excelență, de *transformare* și sublimare a unor propoziții date, premise, în altele, cu rol de concluzie a acestora [56].

În ciuda rolului integrator la care am făcut aluzie, noțiunea de *secvență* coabitează în calculele lui Gentzen cu alte ingrediente metodologice : *regulile (schemele)* operatorii și structurale. Noi pași se cereau întreprinși pentru integrarea tezei într-o noțiune unitară a *schemei deductive*. Ideea l-a preocupat la noi pe regretatul logician și matematician Gr. C. Moisil. Mai multe studii ale autorului român[57] converg în încercarea de edificare a *calculului propozițional de tip superior*. Este vorba de un calcul ierarhic al *schemelor deductive* și al *secvențelor*, ca generalizări ale schemelor deductive. Un calcul unificat, în care nu subzistă decît *diferențele de ordin* între schemele deductive și secvențe, ca forme mai complexe ale acestora. Iată coordonatele sale principale :

— *Scheme (deductive) de primul ordin*, care sînt înseși schemele de expresii propoziționale — $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, . . . , $\mathfrak{M}$, pentru expresii propriu-zise și scheme de expresii ; Γ, Δ pentru mulțimi finite, eventual vide, de scheme de expresii ;

— *Scheme de al doilea ordin*, de data aceasta suite-de-semne de forma :

$$(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}),$$

unde $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{B}$ sînt scheme de primul ordin, respectiv

$$(\Gamma) \Rightarrow (\mathfrak{B}),$$

unde Γ reprezintă, cum am menţionat mai sus, mulţimea schemelor deductive de primul ordin conţinute de antecedent.[58] Generalizărilor acestor scheme, Moisil le spune *secvenţe de al doilea ordin*, de forma :

$$(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r) \Rightarrow (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s)^{59},$$

respectiv :

$$(\Gamma) \Rightarrow (\Delta).$$

— *Scheme deductive de al treilea ordin*, pentru „regulile de trecere de la o schemă de al doilea ordin la alta"[60], configurînd suite-de-semne de forma :

$$(\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_r) \Rightarrow (\Lambda),$$

respectiv

$$(P) \Rightarrow (\Lambda)^{61},$$

unde $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_r, \Lambda$ sînt scheme de al doilea ordin, iar P reprezintă mulţimi de scheme de al doilea ordin, eventual vide. În cazul că şi succedentul unor astfel de scheme este multiplu, vom avea de-a face cu *secvenţe de al treilea ordin*. Se înţelege că *regulile operatorii* şi *regulile structurale* din L-deducţia lui Gentzen apar ca *scheme* ori ca *secvenţe* de al treilea ordin :

$\Gamma \Longrightarrow \theta \Longrightarrow \mathfrak{D}, \Gamma \Longrightarrow \theta$ (Atenuare în antecendent)

$\Gamma \Longrightarrow \theta \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{D}$ (Atenuare în succedent)

$\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \Longrightarrow \theta \Longrightarrow \mathfrak{D}, \Gamma \Longrightarrow \theta$ (Contracţie în a.)

$\Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D} \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{D}$ (Contracţie în s.)

$\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \Longrightarrow \theta \Longrightarrow \Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \Longrightarrow \theta$ (Permutaţie în a.)

$\Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda$ (Permutaţie în s.)

$\Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{M}; \Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{B} \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \theta, \mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{B}$ (&s.)

$\mathfrak{M}, \Gamma \Longrightarrow \Theta \Longrightarrow \mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \Longrightarrow \Theta$ (&a.)

$\mathfrak{B}, \Gamma \Longrightarrow \Theta \Longrightarrow \mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \Longrightarrow \Theta$ (&a.)

$\mathfrak{M}, \Gamma \Longrightarrow \Theta$; $\mathfrak{B}, \Gamma \Longrightarrow \Theta \Longrightarrow \mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \Longrightarrow \Theta$ (v a.)

$\Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{M} \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}$ (v s.)

$\Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{B} \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}.$ (v s.)

$\mathfrak{M}, \Gamma \Longrightarrow \Theta \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \Theta, \neg\mathfrak{M}$ ($\neg$s.)

$\Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{M} \Longrightarrow \neg\mathfrak{M}, \Gamma \Longrightarrow \Theta$ ($\neg$a.)

$\mathfrak{M}, \Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{B} \Longrightarrow \Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}$ ($\supset$ s).

$\Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{M}$; $\mathfrak{B}, \Delta \Longrightarrow \Lambda \Longrightarrow \mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \Longrightarrow \Theta, \Lambda$ ($\supset$a.)

$\Gamma \Longrightarrow \Theta, \mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}, \Delta \Longrightarrow \Lambda \Longrightarrow \Gamma, \Delta \Longrightarrow \Theta, \Lambda$ (Tăietură)

Pînă în acest punct al ierarhiei, noțiunea de *secvență* (care în cazul particular al succedentului unic este numită *schemă deductivă*, fără ca această instanțiere să fie necesară) îi permite lui Moisil să unifice noțiunile de *expresie propozițională* (sau pur și simplu *propoziție*), de *secvență* în sensul lui Gentzen, respectiv de *derivație* (Herleitung) *elementară*. Exprimarea completă a unei *derivații* este posibilă în calculul unificat al logicianului român prin intermediul *secvențelor de ordin oarecare* :

$$(\mathfrak{S}^n_1, \ldots, \mathfrak{S}^n_r) \underset{n+1}{\longrightarrow} (\tau^n_1, \ldots, \tau^n_s)^{62},$$

considerate, în cazul

$$(\mathfrak{S}^n_1, \ldots, \mathfrak{S}^n_r) \underset{n+1}{\longrightarrow} (\tau^n)^{63}$$

ca *scheme de ordin oarecare* (pentru $\mathfrak{S}^n_j$, τ^n_j secvențe de ordinul n).

Una din teoremele calculului extins propus de Moisil se răsfrînge esențial asupra conceptului de *axiomatizare*. În formularea autorului *„Condiția necesară și suficientă pentru ca schema* $\mathfrak{S}^n$ *să fie valabilă este ca* $\underset{n+1}{\longrightarrow}$ τ^n *să fie valabilă”*[64]. Adică, nu putem exprima valabilitatea schemelor deductive, în general a secvențelor, decît într-un sistem cu scheme deductive și secvențe de ordin superior. Concluzia

imediată : schemele de primul ordin nu pot exprima decît ideea de *expresie propoziţională. Teza* sau *legea logică*, ca *expresie propoziţională validă*, va putea fi redată doar în sistemul schemelor şi secvenţelor de ordinul doi.

Teorema menţionată ne repune în contextul principiului originar al axiomaticii. *Nu putem afla justificarea schemelor deductive, respectiv a secvenţelor în interiorul sistemului de acelaşi ordin, dar nici nu putem transfera la infinit sarcina validării sistemelor de ordin superior.* Ne sprijinim în justificarea sistemului dat pe schemele şi secvenţele sistemului de ordin *imediat superior.* Relativă, pentru că este asumată ipotetic şi valorează în contextul unui sistem, *demnitatea axiomei în raport cu teorema se exprimă în aceea că este schemă deductivă ori secvenţă de ordin superior.*

Referinţele de mai sus vădesc aspiraţia către un formalism avansat, apt să depăşească înţelegerea din exterior a procedurilor deductive. Este un punct de sprijin pentru proiectul de reevaluare a conceptului de *axiomatizare*, cu atît mai puternic cu cît îl reperăm în preocupările unui creator reputat în domeniul logicii formalizate. Propunerile lui Moisil pentru *calculul schemelor de ordin oarecare* ne îngăduie să deslușim unitatea metodologică dintre *axiomatica* logică curentă şi metoda *deducţiei naturale.* Pe motiv că ambele proceduri fundaţionale se conformează exigenţei ca grupul axiomatic să conţină *scheme* şi *secvenţe* de ordin superior *schemelor* şi *secvenţelor* din grupul teorematic. Pe de altă parte, diferenţa dintre *teză* şi *regulă* se exprimă în *structura* schemelor deductive, indiferent că sînt de acelaşi ordin sau de ordine diferite. În acelaşi mod se precizează acum şi diferenţa clasică dintre reguli deductive *imediate* şi reguli de inferenţă *mediată.*

Firește, sîntem încă departe de încetăţenirea limbajului unificator al calculului schemelor de ordin oarecare. Punctul de vedere *integrator* are de înfruntat concepţii care depăşesc spaţiul unor consideraţii de ordin *metodologic* şi angajează frontal statutul şi natura logicii ca *ştiinţă*, relativ la disjuncţia mai veche şi mai generală dintre *teoretic* şi *normativ.* În cursul expunerii ne-am referit la *contestarea axiomaticii logice teziale* pe considerentul că *tezele* sau *legile logice* nu sînt decît „reguli deghizate" ca şi cum *regulile deductive* s-ar sustrage travaliului sistema-

tizator al axiomaticii. La fel de unilaterală ne apare atitudinea acelor autori care reduc *regulile deductive* la *legile* logice corespunzătoare, fără a pune în cauză circulația reciprocă dintre cele două tipuri de entități. Să ne oprim, în această privință, la două „reguli propoziționale ale derivației", formulate de P. Suppes:

> Regula T: *Putem introduce o propoziție* S *într-o derivație dacă propozițiile precedente ale derivației sînt astfel încît conjuncția lor implică tautologic* S.
> Regula C.P.: *Dacă putem deriva propoziția* S *din propoziția* R *și din mulțimea premiselor, atunci putem deriva* R ⊃ S *din mulțimea respectivă a premiselor*[65].

Prima dintre regulile menționate se expune la două obiecții. Ca regulă *de deducție (derivație)*, n-ar trebui să se sprijine pe *decizie*. Or, numai prin procedurile deciziei din logica propozițională s-ar putea stabili că un enunț este *implicat tautologic* de conjuncția altor enunțuri. Apoi, chiar în această mixtură, regula ne apare *redundantă*. De ce-ar mai trebui justificat un enunț intermediar între premisele și concluzia întregii derivații, cînd putem cerceta dintr-o dată dacă concluzia derivă tautologic din suma premiselor?

A doua regulă, transfigurînd *teorema deducției*, este și ea *redundantă* în contextul lui Suppes. Neavînd alt criteriu pentru deductibilitatea lui *S* din *R* și din premise decît cel stipulat prin regula anterioară, de ce n-am verifica direct dacă este deductibilă $R \supset S$ din premise?

Formulînd obiecțiile la adresa regulilor lui Suppes, am vrut să arătăm că aplicarea lor anulează intenția derivării unor scheme deductive din alte scheme, primitive, și ne aduce într-o perspectivă *semantică* ce transferă testul validității regulii deductive asupra *tezei logice corespunzătoare*, ca implicație între conjuncția premiselor și concluzia regulii respective. Toate acestea în supoziția autorului, că regulile formulate privesc derivația (deducția) propozițională.

Prin caracteristicile *deducției naturale* luate în discuție am încercat să arătăm că noua tehnică a *sistematizării ipotetico-deductive* nu reprezintă o alternativă la *axiomatica* tezială curentă decît sub aspectul „parametrilor de

utilizare", al funcţiilor cumulative misiunii principale comune — fundamentarea legilor logice. Cum deducţia naturală îşi extinde aplicaţia la domeniul schemelor de inferenţă, este firească ideea unei *generalizări a axiomaticii logice*. Este vorba de o generalizare a metodei deductive care urmează diversificării aplicaţiilor. Spaţiul generalizării poate fi delimitat prin *calculul schemelor de ordin oarecare*, proiect care se cere dezvoltat în legătură cu perfecţionarea instrumentarului metodologic, ca şi cu elucidarea statutului epistemic al logicii formale actuale.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY

Încheiere : DINCOLO DE AXIOMATICĂ...

În cursul expunerii ne-am străduit să arătăm că sub numele *deducției naturale* s-a impus o metodă extinsă și generalizată a axiomaticii. Conceptul clasic al metodei axiomatice nu mai apare în spațiul formalismelor decît ca ipostază a *sistematizării ipotetico-deductive*, pînă acum cea mai frecventă. În limbajul tehnic la care sîntem ținuți să apelăm vom delimita-o prin sintagma : *axiomatică tezială cu fundament tezial*. Altminteri, sistematizarea ipotetico-deductivă s-a extins, prin concursul *deducției naturale*, inclusiv asupra schemelor de inferență. Cu mijloace mai reduse, deducția naturală obține rezultate sporite. De la ecuația :

$$\mathcal{R} \times \mathcal{T} = \mathcal{T}(+\mathcal{R}),$$

axiomatica dobîndește un cîmp operațional maximal :

$$\mathcal{R}(\times\mathcal{T}) = \mathcal{R}(+\mathcal{T}).$$

Tematizarea unei metode integrale a axiomaticii formale pretinde și totodată stimulează reevaluarea categoriilor logice fundamentale de *teză*(*lege*) și *schemă deductivă* (*inferențială*). În ultimul capitol am făcut aluzie, în acest sens, la importanța de principiu pe care o deține calculul unificat al schemelor deductive. Problema *unificării teleologice* în contextul generalizării metodologice a axiomaticii este, totuși, mult prea gravă prin aspectele de conținut, pentru a ne închipui că poate fi tranșată în limitele exclusive ale formalismului. În definitiv, logica din stadiul formalist este tot o știință cu profil metodologic, în mai mare măsură un *organon* sau o *propedeutică* la științe

decît puteau să aspire înaintaşii. Desfăşurîndu-se în chip impresionant ca studiu *vi formae* al autoraporturilor şi relaţiilor gîndirii cu limbajul, acţiunea şi realitatea, logica actuală este ţinută să servească scopurilor ştiinţelor. Se va înfăţişa cu sisteme de legi sau cu sisteme de reguli în contextul rolului explicit sau posibil. Silogistica, terenul atîtor organizări sistemice, ipotetico-deductive, se relevă ca un exemplu. În postura inferenţială, modurile sale codifică mecanismul logic al descoperirii de noi fapte pe baza faptelor cunoscute. Ca legi, aceleaşi silogisme ne dau schema explicării prin cauze a unor fapte cunoscute [1]. *Structura* şi *funcţia* silogismului nu pot fi înţelese decît în corelaţie. Acest singur adevăr ajunge pentru a discredita tendinţa autarhică conferită de unii autori analizei logice şi construcţiilor ipotetico-deductive aferente.

Sistematizînd teoriile logicii, ierarhizîndu-le şi integrîndu-le, axiomatica nu operează ca o metodă oarecare. Devine un mod de existenţă al ştiinţei în atenţie. Dacă trebuie să-i indicăm o alternativă, ne vom opri în chip necesar la *metoda deciziei*. E drept că aceasta din urmă nu şi-a adjudecat pe deplin virtutea de mod general al validării teoriilor logice. Valorează cel mai adesea ca accesoriu al primei metode, chiar şi în domeniile care cultivă distincţia dintre *algebra logică* şi *calculul axiomatic*. În practica axiomatică decidem un enunţ logico-formal pentru a şti dacă merită să-i căutăm demonstraţia ori pentru a controla demonstraţiile întreprinse. În versiunile calculului matriceal, normalizării expresiilor formale, calculului algebric etc., decizia operează ca *mijloc de testare a demonstrabilităţii*, împrejurare în care s-a putut ajunge la demonstraţia automată. Ca revers al acestor servicii, trebuie semnalat transferul impasurilor deciziei (teorema lui Church, de pildă, privind irezolubilitatea problemei rezolubilităţii calculului predicatelor) asupra axiomaticii teoriilor în cauză. Ca dovadă, impunerea noţiunii indistincte de „limită a formalismelor" în critica axiomaticii.

Începutul sistemelor formale neaxiomatice, dacă le putem spune astfel, al validării teoriilor formale altfel decît prin organizarea ipotetico-deductivă, îl datorăm lui Löwenheim, prin memoriul din 1915[2], abordînd logica predicatelor de-ordinul-întîi-cu-identitate fără axiome şi fără

reguli de inferenţă, în contextul teoriei naive a mulţimilor. Se cercetează, anume, dacă validitatea unei formule într-un domeniu se păstrează în condiţiile altor domenii, respectiv dacă putem trece de la validitatea unei formule la validitatea, pentru acelaşi domeniu, a unei formule înrudite. Între anii 1920 şi 1930, lucrările lui Skolem, Gödel şi, mai ales, Herbrand accentuează iar într-o anumită măsură depăşesc tendinţa ansamblistă inaugurată de Löwenheim. Alături de *metoda axiomatică* şi de *metoda ansamblistă* se instituie în fundamentarea logicii *metoda reducerilor Herbrand*[3], prin intermediul căreia se relansează noţiunea demonstrabilităţii. Timpul din urmă ne rezervă şi experienţa reconcilierii. Se încetăţeneşte noţiunea de *axiomatică ansamblistă* [4]. Dincolo de axiomatică ni se deschide astfel un univers prolific al procedurilor de validare, unele manifestînd un statut sintactico-semantic, altele articulînd demersuri pur semantice. *Afirmarea relativă* [5] a enunţurilor, prin demonstraţie, în context sintactic, respectiv depăşirea acestei intercondiţionări — autonomizarea enunţurilor în actul deciziei semantice, al interpretării sau modelării —, aceste două repere delimitează libertatea metodologică impresionantă a logicii formale actuale.

Faţă de ostentaţia cu care se disociază în viziuni epistemologice recente (Th. Kuhn, P. K. Feyerabend, St. Toulmin ş.a.) între logicitatea şi raţionalitatea ştiinţei, în intenţia unei soluţii la problema raţionalizării schimbărilor conceptuale, a „creşterii" şi confruntării teoriilor[6], subliniem că examenul relevanţei empirice şi al aplicabilităţii „populaţiilor" de concepte nu poate fi ţinut să concureze, ci trebuie să completeze în chip firesc idealul sistemic, al „secţiunii transversale" a ştiinţei, prin organizarea unor clase de enunţuri. Că însuşi modelul structural, sistemic-propoziţional, pe care-l întruchipează axiomatica formală, nu poate fi cantonat la dimensiunea statică a ştiinţei ne-o dovedesc caracterizările unor noi niveluri de organizare a ştiinţei. Similar, ca tentativă, analizelor transfrastice din semiotica literară şi lingvistică, *modelul ierarhic multinivelar al sistemului ştiinţei* [7] prelungeşte analiza logică a ştiinţei din planul local, al teoriei ştiinţifice, spre cel disciplinar (al ştiinţei în sens restrîns), zonal (al grupelor de ştiinţe), regional (al tipurilor de ştiinţe) şi global (al ştiinţei în ansamblu). În aceste condiţii, depăşirea axiomaticii

nu va însemna şi părăsirea claselor de enunţuri ca moduri de fiinţare a ştiinţei, în favoarea unor sisteme de concepte, ci subsumarea relaţiei de consecinţă — caracteristică organizării ipotetice-deductive — relaţiei abstracte de presupoziţie. Identificată algebric cu relaţia de ordine nestrictă, această relaţie-sistemică-de-conducere generală se va concretiza la fiecare nivel de logicitate ştiinţifică prin demersuri specifice, precum transferul de concepte, legi şi seturi de axiome, problematici, metode, formalisme etc. [8].

În acord cu perspectiva integrală a dialecticii materialiste şi-n spiritul care a călăuzit inventarul morfologic al axiomaticii conchidem că nu disociind logicitatea de raţionalitate, ci cultivînd noi făgaşe şi criterii de logicitate este facilitată explicaţia raţională şi propulsarea dinamicii ştiinţei prin operaţionalizarea prognozelor epistemologice.

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY

L'AXIOMATIQUE. UN ESSAI MORPHO-LOGIQUE

Résumé

D'habitude, l'axiomatique est assimilée à la déduction des thèses. Sous les auspices du *système hypothético-déductif*, les énoncés configurant les lois d'une théorie apparaissent stratifiés en *axiomes* et *théorèmes*; ces derniers s'obtiennent, évidemment, par le concours des règles déductives. Cette restriction de la notion d'axiomatisation nous rappelle le cantonnement similaire du concept d'application dans la relation théorie-pratique. Dans le cadre de la logique — domaine auquel nous nous rapportons —, l'axiomatique exprime une démarche méthodologique relativement indépendante des entités sur lesquelles elle s'exerce. *Nous procédons axiomatiquement chaque fois que nous postulons* (*affirmons inconditionnellement*) *quelque chose, pour fonder* (*affirmer conditionnellement*) *autre chose.* On part de thèses et de règles déductives, ou seulement de règles, pour arriver à d'autres thèses et à d'autres règles, éventuellement aux seules règles. On opère chaque fois dans un système de référence à deux coordonnées : la *définissabilité* des thermes et la *déductibilité* des énoncés. On accepte ainsi le fait de ne pas tout définir et de ne pas prouver n'importe quoi, en satisfaisant ainsi à une exigence naturelle. Dans la formulation du Stagirit : ἀνάγκη στῆναι (il faut s'arrêter)! De toute façon, on entrevoit une *fonction métalogique* de l'axiomatisation ou de la systématisation hypothético-déductive. Il s'agit d'une fonction méta-théorique et méta-systémique, dans le domaine et le co-domaine de laquelle il y a des thèses et des règles, respectivement rien que des règles.

En enregistrant toutes les associations possibles entre les éléments du domaine et du co-domaine de la fonction mentionnée, on réussira à définir par des traits essentiels

et à organiser dans un système toutes les formes de la méthode axiomatique. Pratiquement, on réalisera une classification mendéléévienne, car chaque variante de la méthode examinée occupera dans le tableau la place qui en détermine univoquement les caractéristiques. En même temps, nous arrivons à indiquer des formes élémentaires nouvelles, extrêmes, encore non utilisées, mais réclamées par la logique interne du tableau :

Corps axiomatique (principes) :		*Corps théorématique (conséquences) :*		*Axiomatisation (systématisation hypothético-déductive)*		
Thèses	*Règles*	*Thèses*	*Règles*	*du point de vue méthodologique :*	*du point de vue téléologique :*	
+	+	+	−	*thésiale*	*thésiale*	(1)
+	+	+	+	"	"	(2)
−	+	+	−	*naturelle*	*thésiale*	(3)
−	+	+	+	"	"	(4)
−	+	−	+	"	*inférentielle*	(5)

Sur les 16 combinaisons possibles des éléments dans le domaine et le co-domaine de la fonction d'axiomatisation, notre tableau exclut d'entrée de jeu huit cas où il n'y a pas de règles dans le corps axiomatique, c'est-à-dire que l'axiomatique est suspendue dans son exercise méthodologique. Deux autres combinaisons sont exclues du fait de l'annulation du corps théorématique, alors que la dernière l'est à cause du déséquilibre inutile entre les deux groupes. Face à ce dernier cas (+ + − +), la prestation effective de l'axiomatique est (− + − +), ce que marque la ligne (5) du tableau.

Dans l'acception courante, la méthode axiomatique ne circonscrit que les hypostases (1) et (2). D'autre part, la „déduction naturelle" même est invoquée dans l'acception restrictive de la fondation des thèses logiques, conformément aux hypostases (3) et (4). Notre tableau marque le fait que la même technique déductive — la déduction naturelle — systématise et des thèses et des règles d'inférence.

Les lignes inscrites dans le tableau ci-dessus peuvent être concentrées dans un arrangement qui mette en évidence le parcours des valeurs ou la matrice de la fonction d'axiomatisation :

Base déductive	*Résultat de la déduction*	*Forme de l'axiomatique (de la systématisation hypothético-déductive)*	
Thèses et Règles	*Thèses (et Règles)*	*Thésiale*	(I)
Thèses et Règles	*Règles*	—	(II)
Règles	*Thèses (et Règles)*	*Thésiale*	(III)
Règles	*Règles*	*Inférentielle*	(IV)

On constate que, du point de vue de la réalisation, la fonction méta-logique de l'axiomatisation (en tant que relation entre les „principes" et les „conséquences") se comporte comme la fonction logique de l'implication.

Dans chaque matrice, le rapport entre „l'espace logique" et le „contenu" est de 3 à 1. Les fonctions correspondantes se réalisent dans 3 sur les 4 cas possibles. L'analogie est marquée suggestivement dans le cas des paradoxes afférents aux deux fonctions. *Le système des thèses logiques peut être édifié avec ou sans l'apport des thèses-axiomes* (conformément aux lignes (I) et (III) de la matrice), tout comme le „vrai" est impliqué et par le „vrai" et par le „faux". *Les règles déductives peuvent constituer et des systèmes de thèses et des systèmes de règles* (les lignes (III) et (IV) de la matrice), tout comme le „faux" implique en même temps et le „vrai" et le „faux". Toutefois, les paradoxes de l'implication (formulés dès le Moyen Age pour l'implication „matérielle" et puis retrouvés dans le contexte d'autres implications) relèvent d'une signification négative, en soulignant les risques du langage formel ou, au moins, les précautions devant en accompagner l'utilisation. En échange, les paradoxes de l'axiomatisation ne peuvent être pris en tant que tels que dans un sens positif, expressions d'une liberté méthodologique. Le premier paradoxe nous indique la prééminence des thèses par rapport à la téléologie de l'axiomatique. Le second

sanctionne l'apport décisif des règles déductives par rapport à la méthodologie de l'axiomatique.

D'un point de vue strictement méthodologique, les systèmes hypothético-déductives d'une théorie logique se distinguent les uns des autres selon qu'ils engagent dans le corps axiomatique des thèses et des règles déductives ou rien que des règles. L'intervention des règles déductives étant indispensables pour le fonctionnement du système, la différence sera donnée par la participation ou l'absence des thèses à la configuration de la base axiomatique et à la réalisation des démonstrations. Dans l'esprit du concept unitaire d'axiomatisation on pourrait tenir les règles primitives pour des axiomes normatifs. Une telle proposition n'a rien de scandaleux du moment que l'axiome même compte à son tour pour un cas-limite de la règle déductive. Faute d'autres expressions plus heureuses, on distinguera l'axiomatisation *thésiale* et celle *„naturelle"*. Chacun des deux modes fondamentaux de la systématisation hypothético-déductive admet le dédoublement d'après le type de démonstration : l'axiomatisation par démonstrations complètes et celle par démonstrations incomplètes. Et la diversification continue d'après la forme de la démonstration : respectivement démonstration directe, conditionnelle et indirecte *(par reductio ad absurdum)* :

Forme de la thèse ou de la conclusion du schéma inférentiel à justifier axiomatiquement :	*Suppositions :*	*Résultat de la démonstration axiomatique :*	*Forme de la démonstration axiomatique :*
P	—	P	*Directe*
$Q \supset R$	Q	R	*Conditionnelle*
S	$\bar{S}$	$Z \,\&\, \bar{Z}$	*Indirecte*

Du point de vue téléologique force nous est de distinguer entre des systèmes instituant des thèses (ou respectivement des thèses et des règles) — ils seront appelés *systèmes thésiaux* — et des systèmes qui fondent exclusivement des règles déductives — les *systèmes inférentiels*.

Les trois critères méthodologiques avec le critère téléologique nous conduisent à 24 *formes possibles de l'axiomatisation* :

Axiomatisation du point de vue méthodologique :		*Axiomatisation du point de vue téléologique :*	*des THÈSES*	*des RÈGLES*
THÉSIALE à démonstrations	*directes*	*complètes*	1	13
		incomplètes	2	14
	conditionnelles	*complètes*	3	15
		incomplètes	4	16
	indirectes	*complètes*	5	17
		incomplètes	6	18
NATURELLE à démonstrations	*directes*	*complètes*	7	19
		incomplètes	8	20
	conditionnelles	*complètes*	9	21
		incomplètes	10	22
	indirectes	*complètes*	11	23
		incomplètes	12	24

Certainement, toutes les formes stipulées ne peuvent pas remplir la tâche de l'édification d'un système hypothético-déductif saturé ou complet. Certaines agissent dans un champ limité du système, en tant qu'alternatives des formes principales, éventuellement plus efficientes que celles-ci. Dans une axiomatisation habituelle des thèses propositionnelles on rencontrera des démonstrations directes, complètes (1) et surtout incomplètes (2). En assumant le théorème de la déduction on pourra aussi réaliser, dans le système, des démonstrations conditionnelles, en illustrant ainsi les formes (3) et (4). Enfin, le système permettra des démonstrations du type (5) et (6) chaque fois qu'une antithèse concourt à l'obtention de deux théorèmes quelconques contradictoires. Dans les calculs *N* et

L de Gentzen, pour la déduction naturelle et pour la séquentielle, peuvent être illustrées les axiomatisations du type (8) et (20), parallèlement à celles du type (10), (12), (22) et (24). Le calcul de la déduction naturelle dans la variante de Jaśkowski exemplifie, *in potentia*, les axiomatiques du type (7), (9), (11), (19), (21) et (23). En étudiant l'infrastructure logique du syllogisme catégorique on a pu indiquer les repères d'une axiomatique du type (13), par rapport à laquelle peuvent être illustrés aussi les types (14)—(18), conformément à la ligne (5) du premier tableau. Dans le cas des six dernières formes d'axiomatiques, les thèses — axiomes et théorèmes — contribuent à fonder des règles déductives (les syllogismes, par exemple) autres que celles de la catégorie des règles primitives. À la rigueur, les théorèmes de ces systèmes ne sont pas des thèses et des règles, mais des thèses intégrées à la structure complexe des règles déductives.

Dans la synthèse typologique que nous venons d'esquisser nous nous sommes indistinctement rapportés à des thèses et des règles. Il est à supposer que, par rapport à ces ingrédients fondamentaux, il faut trancher le statut des *substitutions* et des *définitions*. Dans les applications les plus rigoureuses de la technique axiomatique, les substitutions partageront tantôt la condition de règles déductives, tantôt celle d'axiomes *sui generis*, engagés dans l'exercise des règles déductives proprement dites. S'y ajoute l'utilisation directe des schémas d'axiomes et des schémas déductives. Les systèmes envisagés parviennent à des schémas de théorèmes et à des théorèmes syntaxiques sur les systèmes mêmes, fait significatif de l'évolution de l'axiomatique formaliste.

À leur tour, les définitions seront assimilées elles aussi à des axiomes additionneles, soumis au détachement des opérateurs $\supset$, $\equiv$, $=$ et $\rightarrow$, ou directement à des schémas déductifs, d'introduction et d'élimination du *definiens*.

Comme facteur de variation dans l'ensemble des règles primitives on pourra considérer soit l'ampleur *(adicity)*, soit la nature de la relation inférentielle. Dans le premier cas on distingue les schémas d'inférence immédiate (en tant que règles unaires, à une seule prémisse, et, à la limite, les schémas mêmes d'axiomes, en tant que

règles médadiques, sans aucune prémisse). Selon le second critère, seront départagées des règles déductives *stricto sensu*, des règles de définition et des règles de substitution. Pour rapporter et intégrer les systèmes, il faut tenir compte aussi de la nature des formules logiques entre lesquelles apparaissent des situations inférentielles, en distinguant des règles propositionnelles, classielles, prédicationnelles, syllogistiques etc.

Pour ce qui est du dénivellement des thèses, il faut obéir à un *principe de hiérarchisation des niveaux de l'analyse logique*. La logique des propositions modales, la *protothétique*, la logique des propositions non analysées etc. font voir une homogénéité de structure et de niveau de l'analyse entre axiomes et théorèmes. Dans une hiérarchie des axiomatisations logiques, leurs succèderaient les systèmes simplement extensifs. Exemple classique : les systèmes prédicationnels, qui dérivent des thèses prédicationnelles de thèses propositionnelles et prédicationnelles. De la même catégorie : l'*ontologie* de Leśniewski, fondée sur le système de la protothétique. Pour une troisième classe hiérarchique, des systèmes doublement extensifs, on peut citer le cas de la syllogistique thésiale.

Dans les limites de la même théorie logique, l'enrichissement du groupe axiomatique est reflété dans l'élargissement du corps théorématique. Axiomes et règles additionnelles conduisent à des théorèmes supplémentaires. De la logique *positive* de l'implication pure on passe à la logique *absolue* (sans négation), de là à la logique *minimale*; cette dernière s'intègre à la logique *classique*, non-restrictive. En revanche, les extensions inter-théoriques semblent concentrer l'acte intégrateur sur le groupe axiomatique. On peut obtenir au moyen du nouveau système les théorèmes du système originel. En fait, toutefois, les axiomes et les règles déductives reportés du système générateur au système extensif tombent sous l'incidence des règles additionnelles de substitution, d'introduction et d'élimination de nouveaux foncteurs, si bien qu'elles accroissent et réorientent leur force démonstrative.

L'examen comparatif nous a permi les remarques suivantes :

A. Les systèmes hiérarchisant les thèses logiques dans le contexte des démonstrations complètes — les formes

(1), (3) et (5) du dernier tableau — favorisent une perspective atomiste sur les théories organisées. Chaque théorème se justifie exclusivement par des axiomes et des règles primitives. Un avantage en ce qui concerne l'autonomisation des théorèmes, auquel s'oppose la complication excessive de certaines démonstrations. L'appartenance des thèses au système est marquée dans l'exploitation en commun du groupe axiomatique. L'absence de la communication entre les théorèmes entraîne des redondances dans le fonctionnement du système. L'accent est mis sur l'axiomatisation comme possibilité methodologique et non pas sur la théorie axiomatisée. On pourrait considérer de tels systèmes comme étant du type „*physiologique*". La condition d'existence pour ces systèmes est l'illustration du mode de fonctionnement, de la procédure déductive, et non pas le déroulement des résultats (dans la théorie générale des systèmes formels est véhiculée en ce sens la notion de système deductionnel—alternative du système logistique de l'axiomatique usuelle).

B. L'axiomatique thésiale à fondement thésial et à démonstrations incomplètes — les formes (2), (4) et (6) du tableau — découvre une perspective holiste (intégrative). Les demonstrations se simplifient, le système dans son ensemble évite la redondance, mais les théorèmes perdent leur autonomie. À la dépendance de chaque théorème par rapport au groupe axiomatique s'ajoutent les dépendances univoques entre les théorèmes. Par rapport au style précédent, l'axiomatique envisagée facilite des systèmes du type „*anatomique*". La formulation paraitra paradoxale si l'on a en vue que ces derniers sont les systèmes à fonction effective dans la pratique axiomatique.

C. Toutes les variantes de la déduction naturelle des thèses logiques — les formes (7)—(12) du tableau — configurent des systèmes du type „*physiologique*". Les théorèmes de ceux-ci sont mutuellement indépendants sous l'aspect méthodologique, vu qu'ils sont entièrement asservis par le groupe axiomatique (les règles primitives). Définir de tels systèmes, c'est proposer une relation de déductibilité, c'est caractériser le mécanisme méthodologique, c'est-à-dire montrer comment on peut déduire les thèses. C'est un saut considérable de l'actuel au virtuel dans les conditions de la standardisation progressive de la démons-

tration. La différence entre la déduction naturelle complète et l'incomplète ne s'exprime cette fois que dans la réductibilité des schémas déductifs primitifs dans le cas dernier. L'intervention des relations d'inter-définissabilité pour les foncteurs et quanteurs associe à la première un coefficient d'artificiel, étranger aux intentions des créateurs de la nouvelle technique déductive. Si la déduction naturelle *stricto sensu* (par suppositions) représente un ordre prépondéramment analytique, régressif, *L*-déduction séquentielle de Gentzen impose dans la démonstration un style synthétique prépondéramment progressif. En même temps, *L*-déduction rapproche, à un niveau supérieur de la formalisation, les itinéraires de la déduction par suppositions : la démonstration ou dérivation *directe*, la *conditionnelle* et l'*indirecte*.

D. Bien qu'on n'ait étudié dans la perspective du système hypothético-déductif que la réduction des modes syllogistiques, et elle ne l'a été que très récemment, la notion d'axiomatisation est aussi légitime dans l'horizon des thèses logiques que dans celui des schémas inférentiels, au moins dans la mesure où la déduction naturelle des thèses mène à des systèmes. Leur tenue est „*physiologique*", dans le sens que nous venons de préciser de la communication de chaque „théorème" (schéma déductif dérivé) directement avec le groupe axiomatique. Cet ordre radiaire ne rend pas difficile ici non plus les démonstrations, mais contribue à leur simplification et standardisation maximales. Des performances remarquables sont atteintes en ce sens par le calcul des séquences, dans les applications au domaine des schémas propositionnelles.

E. Les considérations ci-dessus concernent 3 sur les 4 lignes de la matrice de la fonction méta-systémique d'axiomatisation, celles détaillées dans le tableau des 24 formes de l'axiomatisation. Il s'agit des lignes (i), (iii) et (iv),qui fixent l'espace de jeu de la fonction en question, deux pour le domaine des thèses et une pour l'univers des schémas déductifs. Nous avons considéré que la ligne (ii) ne satisfait pas à la fonction d'axiomatisation. La théorie générale des systhèmes formels la retient pourtant dans le contexte de la notion de *système thétique*. C'est le cas-limite, de l'axiomatisation au degré zéro. L'intérêt de celle-ci ? Purement spéculatif si on a en vue la manifestation d'un idéal panaxiomatique. Pratique, si on est atten-

tif aux possibilités permises par la notion dans la définition graduelle des propriétés métasystémiques d'acceptabilité et indépendance des règles primitives et des axiomes, d'équivalence et d'extension des systèmes etc.

Même la simple mention des formes axiomatiques attire l'attention sur les mutations déterminées par l'apparition et la prolifération des *systèmes sans axiomes*. En tant qu'alternative de l'axiomatique usuelle *stricto sensu*, la déduction naturelle a comme avantages la force explicative, le progrès dans le constructivisme et dans la standardisation. L'*analyse inférentielle*, que facilite la version abductive du calcul des séquences, a mené pratiquement à l'automatisation de la démonstration pour les thèses de certains systèmes usuels et même à la démonstration des théorèmes nouveaux, formulés par le computer en accord avec les critères de non-banalité inscrits par le programmeur.

On assiste en même temps à la fusion des deux démarches fondamentales dans la méthodologie de la logique formelle : la *décision* et la *démonstration*. Pour éviter toute confusion, nous précisons qu'il s'agit d'imposer un procédé syntaxique de décision, lequel, par l'utilisation inversée des règles opératoires du calcul des séquences, parvient à indiquer l'avance effective de la démonstration. Ajoutons que la déduction naturelle est un instrument complémentaire de l'axiomatique habituelle, lequel opère aussi dans le domaine des schémas d'inférence. Les calculs des séquences nous permettent de dépasser l'impression d'un dédoublement axiomatique et de voir, dans les formalismes déductifs sans axiomes thétiques, le cadre d'une généralisation méthodologique à une envergure qui se reflète inclusivement dans l'espace théorique, ouvrant la voie à l'unification téléologique de la science se revendiquant de l'étude *vi formae* de la pensée.

On l'appelle *généralisation méthodologique* parce que la déduction naturelle *lato sensu* a le même but que la méthode axiomatique dans l'acception courante — la co-subordination des thèses d'un domaine à un groupe de postulats (sans, pour ce faire, articuler des thèses et des rè-

gles, mais en procédant exclusivement à partir de certaines règles).

On introduit aussi la notion d'*unification téléologique* dans les conditions de l'intégration des entités logiques fondamentales, la *thèse* et la *règle déductive*. L'espace d'une telle unification peut être repéré dans le „calcul des schémas d'ordre quelconque", projet qui doit être développé en rapport avec le perfectionnement de l'instrument méthodologique, tout comme avec l'élucidation du statut épistémologique de la logique formelle actuelle.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Note

Introducere

[1] Petre Botezatu, *Semiotică și negație. Orientare critică în logica modernă*, Ed. Junimea, Iași, 1973, pp. 21—36 (eseul *Logică și aplicabilitate*). De asemenea, Teodor Dima, *Revitalizarea conceptului de aplicație*, „Cronica" 23 (436), Iași, 1974, p. 8.

[2] Metoda *deducției naturale* este consacrată de cercetările independente ale lui G. Gentzen și St. Jaśkowski, în 1934. Pentru o cuprindere de ansamblu a procedurii deductive cf. J. M. Anderson și H. W. Johnstone, *Natural Deduction, The Logical Basis of Axiom Systems*, Wadsworth Publ. C., Belmont, California, 1962. O bibliografie sumară a temei este indicată de Teo Grünberg, *Symbolic Logic*, Ankara, Faculty of Arts and Sciences, 1, 1969, p. 121, n.

[3] Pentru incidența axiomaticilor logicii cu orientările din teoria fundamentelor matematicii, cf. Anton Dumitriu, *Mecanismul logic al matematicilor*, Ed. Academiei, București, 1968, cap. VI—VIII; *Idem*, *Logica polivalentă*, Ed. Enciclopedică, București, 1971, cap. 2, 3 și 6. De asemenea Al. Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Ed. Academiei, București, 1976, cap. 4, 5.

[4] St. Leśniewski, *Introductory remarks to the continuation of my article „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik"*, trad. din germ. („Collectanea Logica", vol. I, Varșovia, 1939, pp. 1—60), în Storrs McCall (ed.), *Polish Logic 1920—1939*, Clarendon Press, Oxford, 1967, p. 117.

[5] Cf. H. Putnam, *How to think quantum-logically*, în „Synthèse", *29* (1974), p. 55.

[6] J. Łukasiewicz, *La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne*, trad. din engl., A. Colin, Paris, 1972, p. 32.

[7] G. Kreisel, *Mathematical Logic: What Has it Done for the Philosophy of Mathematics?*, în R. Schoenman (ed.), *Bertrand Russell Philosopher of the Century*, London, 1967, p. 204.

11 — c. 1959

[8] J. Corcoran, *Aristotle's Natural Deduction System*, în J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, D. Reidel, Dordrecht, 1974, p. 86.

[9] J. Corcoran, *loc. cit.*, p. 85.

[10] M. Mulhern, *Corcoran on Aristotle's Logical Theory*, în J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic*, p. 137.

[11] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, Princenton University Press, 1956.

[12] J. Corcoran, *loc. cit.*, p. 90.

[13] Cf. W. D. Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics*, Oxford, 1965, p. 6; H. Scholz, *Concise History of Logic*, trad. din germ., New York, 1961, p. 3. *Apud* Corcoran, *loc. cit.*

[14] Cf. A. Dumitriu, *Teoria logicii*, Ed. Academiei, București, 1973, p. 115.

[15] Termenul *nomologic*, derivat din grecescul *nomos* — lege, este introdus de Reichenbach ca generalizare a termenului *tautologic*. Disocierea *analitic — sintatic* în interiorul *nomologicului* este destinată să exprime diferența dintre *legile logice* și *legile naturii*. Cf. Hans Reichenbach, *Elements of Symbolic Logic*, MacMillan, New York, London, 1947, pp. 360 sq.

[16] Noțiunea este introdusă de G. Frege. Cf. *Funktion und Begriff*, în G. Frege, *Kleine Schriften*, Georg Olms, Hildesheim, 1967, p. 130.

[17] După criteriul matriceal, al realizării alethice a enunțurilor compuse în diversele combinații ale valorilor posibile de adevăr pentru sub-enunțurile constituente, logica formală distinge *tautologiile* (legile logice, enunțuri întotdeauna adevărate) de *contradicții* (enunțuri întotdeauna false), ca și de *contingențe* (enunțuri sintetice, amfotere, simplu realizabile). Meritul de-a fi consacrat o titulatură care să accentueze distincția dintre legile logicii, *vi formae*, și legile științei, *vi materiae*, aparține lui Ludwig Wittgenstein. Frizînd paradoxalul, afirmațiile sale n-au fost cruțate, însă, de răstălmăciri. Au putut fi îndelung controversate formulările echivalente „Propozițiile logicii sînt tautologii", „Ele sînt propoziții analitice" „Toate propozițiile logicii spun însă același lucru. Anume nimic." (*Tractatus Logico — Philosophicus*, prop. 6. 1 ; 6. 11 ; 5. 43, în L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-philosophicus, suivi de „Investigations philosophiques"*, Paris, Gallimard, 1961). Se pare, însă, că filosoful a avut în vedere un sens particular al afirmației că legile logicii nu spun nimic, acela că *logicul determină posibilul și imposibilul, dar nu realul și irealul*. Cf. Petre Botezatu, *Valoarea deducției*, Ed. științifică, „Logos", București, 1971, pp. 103—104.

[18] Cf. S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, 1967, trad. fr. de J. Largeault, A. Colin, Paris, 1971, p. 41.

[19] J. von Neumann, *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, în „Mathematische Zeitschrift", N° 26, 1927, pp. 1—46; *apud* S. D. Guttenplan & M. Tamny, *Logic: A Comprehensive Introduction*, New York, London, 1971, p. 236.

[20] Cf. Blaise Pascal, *Despre spiritul geometric* (în *Cugetări*, XIII): „Ordinea cea mai perfectă, în lume, constă, nu în a defini orice sau a demonstra orice, nici în a nu defini sau a nu demonstra nimic, ci în a ține calea de mijloc și a nu defini lucrurile clare și înțelese de toată lumea, dar a defini pe toate celelalte; a nu dovedi toate lucrurile cunoscute de oameni, dar a dovedi pe toate celelalte. Contra acestei ordini păcătuiesc acela care caută a defini și a proba totul și cei ce neglijează a o face în lucrurile care nu sînt evidente prin ele însele". (Pascal, *Scrieri alese*, Ed. științifică, București, 1967, p. 149).

[21] Ca și idealul de ordine stipulat de Pascal, principiul aristotelic al impunerii unei origini în lanțul explicațiilor, al definițiilor și demonstrațiilor, suportă o remaniere în axiomatica modernă, formalistă, prin relativizarea calității de *axiomă* și de *termen primitiv* în cadrul sistemului *ipotetico-deductiv*. Cf. A. Dumitriu, „'Ανάγκη στῆναι — *Il faut s'arrêter*", în „Revue Roumaine des Sciences Sociales", *Série de Philosophie et Logique*, Tome III, N°s 2—3, 1968.

[22] F. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, vol. III, Ed. du Griffon, Neuchâtel, 1947, p. 166.

[23] Ecuația meta-funcțională a axiomatizării, (6), respectiv ecuația corespunzătoare meta-relațională ne-au fost sugerate de profesorul Mircea Tîrnoveanu.

[24] Varianta terminologică ne-a fost indicată de profesorul Petre Botezatu.

[25] Wittgenstein introduce noțiunea de *spațiu logic*, precizînd că: „Tautologia lasă realității întreg spațiul logic infinit; contradicția umple întreg spațiul logic și nu lasă nici un punct realității. De aceea nici una dintre ele nu poate determina realitatea în vreun fel" (*Tractatus*, 4. 463).

Carnap înlocuiește denumirea prin *spațiu de joc (Spielraum)* și introduce noțiunea complementară de *Conținut (Gehalt)*: „O propoziție spune ceva asupra lumii prin aceea că ea exclude cazuri determinate, care în sine ar fi posibile, cu alte cuvinte că ea ne informează că realitatea nu aparține cazurilor excluse. Cu cît o propoziție exclude mai multe cazuri, cu atît ea spune mai mult. De aceea este plauzibil să definim *conținutul* unei propoziții drept clasa cazurilor posibile, în care ea nu este valabilă, prin urmare a acelora care nu aparțin spațiului ei de joc" (R. Carnap, *Einführung in die symbolische Logik*, Dritte, unveränderte Auflage, Springer-Verlag, Wien, New York, 1968, p. 21; ambele citate, ca și referințele adiacente figurează în P. Botezatu, *Valoarea deducției*, pp. 103, respectiv 111).

Dacă spațiul logic este clasa evaluărilor posibile pentru care formula „se adevereşte", iar conținutul exprimă clasa evaluărilor posibile în care formula nu se realizează, devenind falsă, rezultă că într-o *tautologie*, spațiul logic este maximal și conținutul nul; într-o *contradicție* spațiul logic este nul iar conținutul maximal; după cum într-o formulă sintetică, simplu realizabilă, evaluările posibile care întruchipează liniile matricei vor fi distribuite variabil în contul celor doi parametri, astfel încît nici unul nu este nul sau de valoare maximală. Pentru exemplificare vom spune că „p" este o propoziție sintetică în care spațiul logic și conținutul se distribuie după proporția 1 : 1 ; „$p \vee q \supset p$" o propoziție sintetică în care raportul celor doi parametri este 3 : 1 ; că „$p \vee \bar{p}$" este o tautologie (raportul dintre spațiul logic și conținut fiind de 2 : 0) ; că „$p \,\&\, q \supset p$" este de asemenea tautologie, de data aceasta raportul parametrilor fiind 4 : 0 ; în fine, că „$\overline{p \supset p}$" sau „$\overline{p \,\&\, p \vee q}$" sînt contradicții, avînd ca distribuții ale parametrilor analizați 0 : 2, respectiv 0 : 4 ; etc. În figurația matriceală :

p	q	p	$p \vee q \supset p$	$p \vee \bar{p}$	$p \,\&\, q \supset p$	$\overline{p \supset p}$	$\overline{p \,\&\, p \vee q}$
A	A	A	A	A	A	F	F
A	F		A		A		F
F	A	F	F	A	A	F	F
F	F		A		A		F

Am stăruit asupra celor două noțiuni complementare întrucît concură nu numai la luminarea specificului legilor logice, ci și la dobîndirea unui criteriu de evaluare a deducțiilor. A se vedea pentru aceasta P. Botezatu, *op. cit.*, pp. 112 sq.

[26] Cf. Gh. Enescu, *Le problème du niveau de l'abstraction dans l'introduction du langage de la logique propositionelle*, în „Analele Universității București", Seria *Acta Logica*, Anul VI, 1963, pp. 171—173. De asemenea P. Ioan, *The Paradoxis of Implication*, *rev. cit.*, Anul XIV (1971), pp. 81—89.

Capitolul I

[1] Gilles-Gaston Granger, *Pensée formelle et sciences de l'homme*, Éd. Aubier-Montaigne, Paris, 1967, p. 166.

[2] *Ibidem*, p. 162.

[3] J. Piaget, *Epistémologie de la logique*, în vol. col. *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Gallimard, 1967, p. 393.

[4] Jean Ladrière, *Les limitations internes des formalismes — Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la*

théorie des fondements des mathématiques, Louvain : E. Nauwelaerts ; Paris : Gauthier-Villars, 1957, p. 35.

[5] *Ibidem*, p. 38.

[6] *Ibidem*, p. 36 ; *s. ns.*, *P.I.*

[7] *Ibidem*, p. 15.

[8] *Ibidem*, pp. 36—37.

[9] *Ibidem*, p. 37.

[10] Cf. Hao Wang, *Studii de logică matematică*, trad. din engl., Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1972, p. 11.

[11] Roger Martin, *Logique contemporaine et formalisation*, P.U.F., Paris, 1964, p. 15.

[12] J. Ladrière, *op. cit.*, p. 41.

[13] J. Vuillemin, *Problèmes de la validation (Begründung) dans les axiomatiques d'Euclide et de Zermelo*, în vol. col. *The Foundations of Statements and Decisions*, K. Ajdukiewicz (ed.), Varşovia, 1965, pp. 179—180 ; *apud* Anton Dumitriu, *Teoria logicii*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1973, p. 11.

[14] Rudolf Carnap, *Einführung in die symbolische Logik*, dritte Auflage, Springer Verlag, Wien-New York, 1968, p. 173.

[15] W. Stegmüller, *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie*, Band II, Teil D, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, pp. 35—41.

[16] Cf. A. Dumitriu, *La logique classique et les systèmes formels*, în „Revue Roumaine des Sciences Sociales", *Série de Philosophie et Logique*, 3, 1966 ; *Idem*, *'Αναγκη στῆναι — Il faut s'arrêter*, *rev. cit.*, 2—3, 1968 ; *Idem*, *Theory and System*, Capelli, Urbino, 1970 ; *Idem*, *Teoria logicii*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1973 ; etc.

[17] A. Dumitriu, *Teoria logicii*, p. 115.

[18] Cf. L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, 6. 1263 („În logică fiecare propoziţie este forma unei demonstraţii") şi 6. 1224 („fiecare propoziţie — logică, *n. ns*, *P.I.* — este un *modus ponens* reprezentat în semne").

[19] Se face aluzie la afirmaţia lui F. Waismann *(Ist die Logik eine deduktive Theorie?*, în „Erkenntnis", Bd. 7, p. 280), că „logica nu este o construcţie de adevăruri, ci numai expresia unor reguli de deducţie".

[20] A. Dumitriu, *op. cit.*, p. 127.

[21] *Ibidem*, p. 129.

[22] Cf. P. Ioan, *Structura silogismului*, în „Analele Universităţii *Al. I. Cuza* din Iaşi", III b, XIX (1973), p. 50 ; *Idem*, *La dualité des structures syllogistiques*, în „Revue Roumaine des Sciences Sociales", s. Phil. et Log., Tome XX, 3, 1976.

[23] L. Carroll, *What the Tortoise said to Achilles*, „Mind", IV (1895), pp. 278—280 ; trad. fr. în L. Carroll, *Logique sans peine*, Herman, Paris,

1966, pp. 242—246. Cf. și W. A. Wisdom, *Lewis Carroll's Infinite Regress*, „Mind", LXXXIII, 332, 1974, pp. 571—573.

* Un exemplu ni-l oferă logica deontică, ale cărei teze sînt raportate la valorile de săvîrșire a acțiunilor („îndeplinit" și „neîndeplinit") de către von Wright, la natura acțiunilor („intrinsec bună", „indiferentă" și „intrinsec rea") de către Kalinowski, la calitatea deontică sau normativă a acestora („obligatoriu", „indiferent", „interzis") de către Weinberger sau Fisher, ori global, la funcțiile deontice luate ca propoziții simple (Cf. Georges Kalinowski, *La logique des normes*, P.U.F., Paris, 1972, pp. 117—118 și 166). Metode de decizie în logica deontică fără apel la valorile argumentelor nominale de acțiune propune Cornel Popa în *Decision in Deontic Praxiological Systems*, I—II, „Rev. Roum. Sciences Sociales", Série de Philosophie et Logique, *20*, 2—1976, pp. 173—180; 3—1976, pp. 267—286.

[24] În *Valoarea deducției* (Ed. științifică, București, 1971, p. 155), P. Botezatu distinge între *deducția axiomatică* (prin axiome și reguli), *deducția structurală* (prin definiții și reguli) și *deducția naturală* (prin reguli și premise). Practic, însă, doar deducția naturală se dispensează de aportul definițiilor. Cu excepția formalismelor care se reclamă de la metamatematica intuiționistă, deducția axiomatică curentă apelează la interdefinisabilitatea diverselor categorii de operatori în vederea scurtării demonstrațiilor și a maniabilității sistemelor.

[25] Cf. John Corcoran, *Remarks on Stoic Deduction*, în J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1974, p. 176. Autorul american distinge între « sistemul propozițional » (*sentential system*) și « sistemul inferențial » (*argumental system*). În prima clasă sînt trecute sistemele « deducțiilor directe lineare » (Boole și Hilbert), sistemele « deducțiilor lineare directe și indirecte », respectiv sistemele « deducțiilor supoziționale » (Jaśkowski, Fitch ș.a.). În a doua clasă, a sistemelor « care consistă exclusiv din liste ale argumentelor (schemelor deductive) ». Corcoran include sisteme de felul celor ale lui E. J. Lemmon (1965), P. Suppes (1957), B. Mates (1965), calificînd, în schimb, sistemul lui Aristotel de silogistică ca unul cu deducții *lineare* directe și indirecte. Nu excludem și această postură a silogisticii aristotelice, asumată prin celebra interpretare a lui J. Łukasiewicz, dar ne surprinde derogarea autorului de la poziția minuțios argumentată în cursul aceluiași volum (*Aristotle's Natural Deduction System*, pp. 85—131), că „teoria deducției la Aristotel conține un sistem al deducției naturale autosuficient" (p. 97), un sistem „al perfectării silogismelor" (p. 109), pornind, ca atare, de la regulile conversiunii și de la silogismele perfecte în calitatea lor de reguli ale inferenței (*idem*).

[26] A. Dumitriu, *Axiomatica teoriilor deductive*, în *Probleme de logică*, II, Ed. Academiei, București, 1970, p. 113.

[27] *Ibidem*, p. 136.

[28] *Ibidem.*

[29] Cf. R. Blanché, *La science actuelle et le rationalisme*, P.U.F., Paris, 1967, pp. 109 sq.

[30] *Ibidem*, p. 100.

[31] Expresia aparține lui P. Linke, *Eigentliche und uneingentliche Logik*, în „Methodos", 1952, p. 17; cf. Blanché, *op. cit.*, p. 109.

[32] A se vedea R. Blanché, *Le raisonnement*, P.U.F., Paris, 1973, pp. 20—21.

[33] Pentru aprofundarea distincției, cf. R. Blanché, *L'axiomatique*, P.U.F., Paris, 1950 (5e éd.), p. 28; *idem*, *La science actuelle et le rationalisme*, p. 104.

[34] D. Lacombe, *Les idées actuelles sur la structure des mathématiques*, în vol. colectiv *Notion de structure et structure de la connaissance*, Ed. Albin Michel, Paris, 1957, p. 86.

[35] Gh. Enescu, *Logică și adevăr*, Ed. politică, București, 1967, p. 219.

[36] J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, p. VIII.

[37] *Ibidem*, p. 439.

[38] *Ibidem.*

[39] N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, 1948, trad. rom. în antologia *Logică și filosofie*, Ed. politică, București, 1966, p. 553.

[40] Cf. Aristotel, *An. sc.*, I, 71 a.

[41] Ladrière, *op. cit.*, p. 38.

[42] *Ibidem.*

[43] „*În logică nu există morală.* Fiecare e liber să-și construiască propria lui logică, propria sa formă de limbaj, după plac. Tot ce i se cere e ca, în cazul cînd dorește să discute despre acestea, să-și enunțe limpede metodele și să dea reguli de sintaxă, în loc să dea argumente filosofice". (R. Carnap, *The Logical Syntax of Language*, Routledge and Kegan, Londra, 1954, p. 52; *apud* Ath. Joja, *Studii de logică*, vol. II, Ed. Academiei, București, 1966, p. 10).

[44] Sintagma este consacrată de Church în legătură cu sistemele unei teorii logice, complete functorial și axiomatic.

[45] „Relația-axiomă, va spune A. Rey (în *Encyclopédie française*, 1, 18, 6), nu este decît un fel de definiție implicită sau indirectă", în alți termeni, „definiții deghizate" (H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris, 1902, p. 67). Cf. în acest sens J. Ullmo, *La pensée scientifique moderne*, Flammarion, Paris, 1969, p. 135.

[46] R. Blanché, *La science actuelle et le rationalisme*, p. 84.

[47] Cf. J. Piaget, *Le système de la classification des sciences*, în vol. colectiv *Logique et connaissance scientifique*, Gallimard, Paris, 1969, p. 1223.

[48] S. C. Kleene, *Logique mathématique*, trad. din engl., A. Colin, Paris, 1971, p. 200.

[49] R. Blanché, *La science actuelle et le rationalisme*, p. 104.

[50] Louis Rougier, *La structure des théories déductives. Théorie nouvelle de la déduction*, F. Alcan, Paris, 1921, p. 1.

[51] Sarcina dificilă de a găsi un criteriu pur formal pentru identificarea obiectelor admise ca existente de o anumită teorie, pentru «asumpția ontologică» sau «importul existențial» al acesteia l-a preocupat timp îndelungat pe W. O. Quine. A se vedea Cornel Popa, *Trei concepții ontologice contemporane*, în C. Popa (ed.), *Existență, cunoaștere, acțiune. Dialog și confruntări în filosofia contemporană*, Ed. științifică, București, 1971, pp. 69—70; P. Ioan, *Ontologie et assomption ontologique dans la syllogistique formelle*, „Revue Roumaine des Sciences Sociales", Série de Philosophie et Logique, *22*, 2—1978, pp. 103 sq.

[52] A. Dumitriu, *Teoria logicii*, p. 187.

[53] *Idem*, *Theory and System*, p. 56.

[54] Cf. J. Largeault, *Enquête sur le nominalisme*, Béatrice-Nauwelaerts, Paris, Louvain, 1971, pp. 310 sq.

[55] R. Blanché, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, A. Colin, Paris, 1970, p. 356.

[56] În acest caz, obiecția nu angajează atît axiomatica din științe, cît filosofia nominalistă cultivată în marginea acestora, filosofie care se confundă, *in extremis*, cu „poliția limbajului și cu determinarea regulilor sale de construcție" (cf. G. —G. Granger, *Pensée formelle et sciences de l'homme*, p. 23).

[57] N. Bourbaki, *loc. cit.*, p. 553.

[58] *Ibidem*, p. 554.

[59] P. Botezatu, *Semiotică și negație*, Ed. Junimea, Iași, 1973, p. 105.

[60] *Ibidem*, p. 133.

[61] F. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, vol. 5, éd. du Griffon, Neuchâtel, 1955, pp. 335—336.

[62] S. C. Kleene, *op. cit.*, pp. 200—201.

[63] Roger Martin, *Logique contemporaine et formalisation*, P.U.F., Paris, 1964, p. 7.

[64] J. Piaget, *Le système et la classification des sciences*, în vol. col. *Logique et connaissance scientifique*, pp. 1184—1185.

[65] J. Ladrière, *L'articulation du sens. Discours scientifique et parole de la fois*, 1970, p. 39.

[65a] Harold Newton Lee, *Symbolic Logic. An Introductory Textbook for Non-Mathematicians*, Routledge & Kegan Paul, London, 1961, pp. 280, 289.

[65b] *Ibidem*, p. 13.

[66] Cf. Ed. Husserl, *Logique formelle et logique transcendentale. Essai d'une critique de la raison logique*, trad. din germ., P.U.F., Paris, 1957, pp. 123, 125.

[66a] H. N. Lee, *op. cit.*, p. 13.

[67] J. M. Bocheński, *The Methods of Contemporary Thought*, trad. din germ., D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1965, p. 65. Cf. de asemenea J. Ladrière (*Les limitations internes des formalismes*, p. 439): „Limbajul simbolic (. . .) este capabil să reprezinte demersurile care se întîlnesc în planul gîndirii intuitive. El face posibil astfel o analiză riguroasă a acestor demersuri, însă această analiză nu este decît indirectă, ea nu poartă asupra conținuturilor semnificative care se elaborează în intuiție ci asupra reprezentării lor formale, elucidarea sensului devenind investigație metateoretică. Pentru a descurca confuzia, gîndirea matematică recurge nu la o metodă de reflexie, ci la una de obiectivare; (. . .) ea se străduie să transfere operațiile sale într-o structură obiectivă și să rezolve dificultățile în care se află impunînd acestei structuri proprietăți adecvate. Ea regăsește astfel, cu instaurarea sistemului formal, eficacitatea pierdută: cum sistemul formal este constituit din entități care sînt prezentate în manieră explicită sau e posibil să le obținem cu ajutorul procedurilor efective, se poate face o descriere exactă și sistematică, și supune unui control riguros expresiile pe care le permite să le construim".

[68] P. Botezatu, *Valoarea deducției*, Ed. științifică, București, 1971, p. 159.

[69] P. Suppes, *The desirability of formalization in science* (1968); trad. rom. în I. Pârvu (ed.), *Epistemologie — orientări contemporane*, Ed. politică, București, 1971, p. 272.

[70] R. Blanché, *La science actuelle et le rationalisme*, pp. 101 sq.

[71] Cf. *Idem*, *Logique et son histoire d'Aristote à Russell*, pp. 362—363.

[72] *Ibidem*, pp. 361—362.

[73] În concepția noastră, înșeși principiile logice (și demersurile operatorii legitimate de acestea, afirmația și negația) se cer redefinite astfel încît să sublinieze emergența diferitelor manifestări ale pluralismului logic din corpul minimal al unei logici «standard». Cf. P. Ioan, *Linéaments pour une réhabilitation des principes de la pensée du point de vue formel*, în *Contributed Papers of the 5 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, London, Ontario, Canada, 1975, s. IV (studiul în detaliu a apărut, sub același titlu, în „Analele Universității *Al. I. Cuza* din Iași", Tomul XX, secțiunea IIIb, 1974, pp. 69—76); *Idem*, *Relativizarea afirmației și negației în logica formală*, în *rev. cit.*, XXI, 1975, pp. 75—82.

[74] Mario Bunge, *Treatise on Basic Philosophy*, 2, *Semantics II: Interpretation and Truth*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Boston, 1974, p. 81.

[75] Exigența dialectică a corelativizării formei și conținutului ne-a călăuzit în abordarea implicației, contrafactualilor, principiilor, relațiilor și operațiilor logice (cf. n. 73 și P. Ioan, *The Paradoxis of Implication*, „Acta Logica", XIV, 1971 ; *Implicația logică și contrafactualii*, „Revista de filosofie", nr. 4, 1978 ; *Pour une conception unitaire sur les rapports logiques entre les propositions et les concepts*, „Revue Roumaine des Sciences Sociales", Série Philosophie et Logique, 4, 1978).

[76] Ideea definirii logicii ca sistem de științe, ordonate pe domenii de origine și ierarhizate pe niveluri de construcție a fost argumentată de P. Botezatu la al IV-lea Congres internațional de logică, metodologie și filosofia științei, București, 1971. Cf. P. Botezatu, *Semiotică și negație*, Ed. Junimea, Iași, 1973, pp. 180—184.

[77] N. Rescher, *Discourse on a Method*, în *Topics in Philosophical Logic*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1968, pp. 332—341.

[78] Pentru inventarul dezvoltărilor logicii contemporane cf. N. Rescher, *Recents Developments and Trends in Logic*, în „Logique et Analyse", 35—36, 1966, pp. 269—277 ; *Idem*, *Topics in Philosophical Logic*, pp. 1—13. „Harta" autorului american este prezentată și comentată de P. Botezatu, în *Semiotică și negație*, pp. 7 sq.

[79] Cf. B. M. Kedrov, *Contribution au problème des rapports de la dialectique avec formalisation et avec modélation*, în „Acta Logica", V, 1962, p. 49.

[80] B .V. Šešić, *Foundations of the Logic of Change and Development*, în „International Logic Review", 4, 1971, pp. 150—165 ; *Idem*, *Logic of Change*, Centro sup. di logica e scienza comp., Azzoguidi Ed., Bologna, 1972 ; D. Dubarle *et* A. Doz, *Logique et dialectique*, Larousse, Paris, 1972.

[81] R. Martin, *Sur les notions intuitives mises en oeuvre par la construction et l'étude d'un système formel*, în vol. col. *Le raisonnement en mathématique et en sciences expérimentales*, C.N.R.S., Paris, 1958, p. 91.

[82] J. Dopp, *Notions de logique formelle*, Pr. Univ. de Louvain, 1965, p. 257.

[83] G.-G. Granger, *op. cit.*, p. 144.

[84] *Ibidem*, p. 143.

[85] *Ibidem*, p. 169.

[86] N. Bourbaki, *loc. cit.*, p. 549.

[87] R. Martin, *loc. cit.*, p. 94.

[88] J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, p. 10 ; *Idem Les limites de la formalisation*, în vol. col. *Logique et connaissance scientifique*, pp. 330—332.

[89] R. Martin, *Logique contemporaine et formalisation*, P.U.F., Paris, 1964, p. 190.

[90] P. Suppes, în *loc. cit.*, pp. 271 sq. La timpul său, L. Rougier afirma în acest sens: „caracterul formal al oricărei teorii deductive, (...) el singur

permite să se înțeleagă economia gîndirii discursive, mecanismul demonstrației, distincția dintre științele formale și științele empirice, aplicația matematicilor la natură. A-l nega, înseamnă a pune în chestiune (...) existența însăși a Logicii formale" (*La structure des théories déductives*, p. XV).

[91] A. Mostowski, *Stadiul actual al cercetărilor de fundamentele matematicii*, trad. din polonă, în vol. antologic *Logică și filosofie*, 1966, p. 478.

[92] N. Mouloud, *Langage et structures. Essais de logique et de sémiologie*, Payot, Paris, 1969, p. 87.

[93] J. Piaget, *loc. cit.*, p. 387.

După Hilbert (*Über den Zahlbegriff*, 1900), „în ciuda înaltei valori pedagogice și euristice a metodei genetice, metoda axiomatică este preferabilă pentru reprezentarea definitivă și consolidarea logică perfectă a conținutului cunoașterii" (*apud* J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme*, Hermann et Cie, Paris, 1938, p. 76).

[94] J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, p. 411.

[95] R. Blanché, *L'axiomatique*, 5e éd., P.U.F., Paris, 1970, p. 76.

[96] R. Martin, *Logique contemporaine et formalisation*, p. 127.

[97] Cf. R. Boudon, *À quoi sert la notion de 'Structure'? Essai sur la signification de la notion de structure dans les sciences humaines*, Gallimard, Paris, 1968, pp. 116 sq.

[98] J. Ladrière, *L'articulation du sens*, 1970, p. 166.

[99] *Ibidem*, p. 170.

[100] D. Hilbert, *Gîndirea axiomatică*, trad. din germ., în vol. *Logică și filosofie*, 1966, p. 104.

[101] H. Cartan, *Despre fundamentele logice ale matematicii*, trad. din fr., în *vol. cit.*, p. 536.

[102] *Ibidem*, p. 537.

[103] N. Bourbaki, *loc. cit.*, p. 548.

[104] G.-G. Granger, *op. cit.*, pp. 162—163.

[105] Jean Ullmo, *La pensée scientifique moderne*, Flammarion, Paris, 1969, p. 135.

[106] R. Blanché, *L'axiomatique*, p. 84.

[107] G.-G. Granger, *op. cit.*, pp. 164 sq.

[108] Cf. J.-L. Destouches, *Essai sur la forme générale des théories physiques*, Cluj, 1938, p. 102.

[109] *Logică, metodologie, filosofia științei*, C.I.D.S.P., București, 1972, p. 93.

[110] Lucian Blaga, *Experimentul și spiritul matematic*, Ed. științifică, București, 1969, p. 87.

[111] *Ibidem*, p. 168.

[112] P. Botezatu, *Valoarea deducției*, 1971, p. 168.

[113] *Ibidem*, pp. 168—169.

[114] După Ladrière (*Les limitations internes des formalismes*, pp. 8—9), aceste limite „revin la aceea că nu este posibil a formaliza complet o teorie matematică din moment ce aceasta atinge un anumit nivel de complexitate. În anumite cazuri, modelul simbolic eșuează în reprezentarea adecvată a lanțurilor deductive care există în interiorul teoriei din forma intuitivă, neformalizată. În alte cazuri, acest model eșuează în reprezentarea anumitor concepte intuitive relativ la teorie".

Faptele de limitare, clasificate de autorul belgian, sînt, în principal: 1) *teorema lui Gödel* sub diferite forme și generalizările acesteia, de asemenea teoremele înrudite; 2) teoremele relativ la *limitele de reflexivitate* ale sistemelor formale: corolarul lui Gödel și generalizarea acestuia de către Rosser, teorema asupra adevărului, teorema lui Tarski asupra noțiunii de „definisabil", teorema lui Rosser și Wang; 3) teorema *relativă la problema deciziei*: teorema de bază și consecințele relative la rezolubilitatea anumitor sisteme formale; 4) teoremele stabilind *legături între diferitele categorii de rezultate*: teorema de stratificare a lui Kleene, generalizarea și consecințele sale, teorema lui Post și consecințele sale, teorema lui Tarski, generalizările semantice ale teoremei lui Gödel și legăturile acestor rezultate cu teorema asupra adevărului; 5) teorema lui Kleene-Rosser-Curry; 6) rezultatele *relative la cîmpurile de interpretare și la modele*: teorema Löwenheim-Skolem sub diferitele forme și considerațiile privind relativitatea conceptelor matematice, a doua teoremă a lui Henkin, rezultatele relative la categoricitatea sistemelor de axiome; 7) *existența sistemelor nongödeliene* și proprietățile acestora (cf. Ladrière, *op. cit.*, p. 398).

[115] P. Botezatu, *Valoarea deducției*, p. 197.

[116] D. Stoianovici, *Deducția privită istoric și critic*, în „Revista de Filosofie", *19* (1972), 7, p. 916.

[117] Dintre cele patru condiții, „metateoretice" sau „metasistemice", doar trei privesc expres axiomatica; a patra, *decidabilitatea*, personifică, de fapt, alternativa metodei deductive, instrumentul de control al acesteia. Două din cele trei condiții ale unui sistem axiomatic suportă formulări deopotrivă în planul *sintaxei* și la nivelul *semanticii*, a treia, *categoricitatea*, întruchipează o coordonată strict *semantică*.

[118] D. Stoianovici, *loc. cit.*

[119] P. Botezatu ne trimite, în acest sens, la L. Kalmár, *On the Problem of the Foundation of our Knowledge*, în *The Foundations of Statements and Decisions*, P.W.N., Warszawa, 1965, pp. 13—19; M. Black, *The Justification of Logical Axioms*, *loc. cit.*, pp. 65—71 (a se vedea *Valoarea deducției*, pp. 177—178).

[120] P. Botezatu, *op. cit.*, p. 184.

[121] D. Stoianovici, *loc. cit.*

[122] Pentru definiția și comentariul în detaliu al *antinomiilor metodei deductive* cf. P. Botezatu, *op. cit.*, pp. 169—195.

[123] *Ibidem*, p. 198.

[124] J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, p. 427.

[125] *Idem*, *Les limites de la formalisation*, în J. Piaget (ed.), *Logique et connaissance scientifique*, p. 316.

[126] *Ibidem*, p. 332.

[127] P. Botezatu, *Valoarea deducției*, p. 199.

[128] *Ibidem*, p. 168.

[129] J. Ladrière, *loc. cit.*, p. 324.

[130] D. Lacombe, *Les idées actuelles sur la structure des mathématiques*, în *Notion de structure et structure de la connaissance*, 1957, p. 89. Iar J. Ladrière (*loc. cit.*, p. 324) este ținut să ne avertizeze că limitele formalismelor *sînt inerente noțiuni de sistem formal*, „au un caracter esențial; ele aparțin sistemelor formale prin însăși natura acestora, în definitiv ele sînt implicit conținute în proiectul însuși al formalizării".

[131] D. Stoianovici, *loc. cit.*, p. 917.

[132] J. Piaget (*Les courants de l'épistémologie scientifique contemporaine*, în *Logique et connaissance scientifique*, p. 1225) realizează o distincție similară în planul însuși al epistemologiei, corelînd *epistemologia internă* a unei științe cu examenul critic al metodelor și fundamentelor proprii acesteia, iar *epistemologia derivată* cu studiul condițiilor care fac posibilă această știință, ceea ce conduce la relațiile cu alte discipline și la chestiunile generale privind aportul subiectului și obiectului în mecanismul cunoașterii.

[133] J. Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, p. 404.

„Rațiunea poartă în ea o normă, o voință imprescriptibilă de unitate și transparență, însă ea nu pare să poată nici a se totaliza, nici a se explicita pe deplin. Ea este totuși suficient de lucidă pentru a recunoaște în ea această limitare. Limita nu ne va apărea decît pe fondul nelimitatului. Drept pentru care trebuie să o înțelegem nu ca un termen ce-ar lipsi la capătul unui parcurs, ci mai curînd ca semnul unei finitudini care poartă în ea în același timp mărturia neputinței sale și curajul unei speranțe deschise spre infinit". (Ladrière, *L'articulation du sens*, p. 50).

[134] *Idem*, *Les limitations internes des formalismes*, p. 438.

[135] *Ibidem*, p. 410.

[136] F. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, III, 1947, p. 160.

[1] În literatura de specialitate circulă ca sinonimi termenii „regulă de deducție", „regulă de derivație", „regulă de transformare" (R. Carnap), „regulă de procedură" (A. Church) etc.

[2] Respectiv regula „nulară" sau „medadică" (Peirce), cu zero premise, adică de relație deductivă nulă. Circulația liberă, cu dublu sens, între *teze* și *reguli* l-a făcut pe G. Hasenjaeger (*Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik*, München, 1962, p. 78) să numească pe unele „reguli înghețate" iar pe celelalte „teze dezghețate" (cf. P. Botezatu, *Semiotică și negație*, p. 111).

[3] J. Porte, *Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes connectifs*, Paris, Louvain, 1965, p. 23, df. 11.1.

[4] Expresia este lansată de Paul Lorenzen în *Metamathtematik* (cf. trad. fr. realizată de J. B. Grize la Ed. Mouton, Paris, 1967).

[5] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, Princeton University Press, 1956, p. 72.

[6] Se va recunoaște în exemplul de inferență mediată modul silogistic *Darii* (fig. I), iar în exemplul de *inferență imediată* regula de conversiune a judecății universal-negative.

[7] A. Church, *op. cit.*, pp. 296—297.

[8] *Ibidem*, p. 172.

[9] *Ibidem*, pp. 172—173.

[10] *Ibidem*, p. 186.

[11] „Recunoașterea unei anumite propoziții ca instanță a unei propoziții generale oarecare anterior demonstrată, scriu Russell și Whitehead, nu poate fi stipulată ca însăși într-o regulă generală". (cit., fără referință, de A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, pp. 157—158).

[12] Cf. A. N. Prior, *Formal Logic*, 1955, 2[d] ed., 1962, At The Oxford University Press, p. 98.

[13] Observațiile pe care le dezvoltăm în legătură cu poziția lui Russell și Whitehead urmează notațiile lui Prior din *op. cit.*, p. 98.

[14] Cf. Prior, *op. cit.*, p. 99.

[15] Într-adevăr:

EEV*p*E*pp*EEV*p*E*pp*EE*pq*EE*rq*E*pr*	(1,*s*/V*p*)	
EV*p*E*pp*	(2)	detașare
EEV*p*E*pp*EE*pq*EE*rq*E*pr*		
EV*p*E*pp*	(2)	detașare
EE*pq*EE*rq*E*pr*	(3)	

EEE*ppEpp*EEE*ppEpp*EE*pq*E*rqEpr*	(1,*sEpp*)	
EE*ppEpp*	(2′,*p*/E*pp*)	
EEE*ppEpp*EE*pq*E*rqEpr*		detașare
EE*ppEpp*	(2′, *p*/E*pp*)	
E*pq*E*rqEpr*	(3)	detașare

[16] A. N. Prior, *op. cit.*, *p.* 99, nota 1.

[17] Protothetica (de la *thesis* -teză și *prôtos*-prim, de bază) este primul calcul propozițional în care apar variabile de functori și cuantori pentru variabilele propoziționale.

[18] H. M. Sheffer (*A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants*, „Trans. Amer. Math. Soc.", *14*, pp. 481—488) a descoperit posibilitatea de a reduce toți functorii la *incompatibilitate* (anticonjuncție), iar J. G. P. Nicod (*A reduction in the number of the primitive propositions of logic*, „Proc. Cambr. Phil. Soc.", XIX, P.I., pp. 32—41) a reeditat performanța pentru cazul functorului *rejecție* (antidisjuncție).

[19] A. N. Prior, *Formal Logic*, pp. 95, 308.

[20] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, I. pp. 77—78.

* Tangențial, acest punct de vedere a fost împărtășit la noi de Fl. Țuțugan. „Propozițiile-definiții — considera autorul *Sintezei în silogism*— nu sînt ceva de la sine înțeles (putînd să difere de la sistem la sistem) și nici nu se deosebesc, din punct de vedere strict logic, de celelalte propoziții prime, încît e cu totul arbitrar și fără nici un fundament logic ca să afirmăm că judecățile ce derivă și se bazează pe definiții sînt analitice, pe cînd cele care derivă și se bazează pe celelalte propoziții prime pot avea un oarecare grad de sinteză" („Revista de Filosofie", vol. XXIX, nr. 3—4, 1943, p. 225). Despre rolul abreviativ și sintactic-calculatoriu al definițiilor în contextul axiomatizării cf. Cornel Popa, *Teoria definiției*, Ed. științifică, „Logos", 1972, pp. 94—95 și 166—170.

[21] P. Botezatu, *Schiță a unei logici naturale. Logică operatorie*, Ed. științifică, București, 1969, pp. 87—88.

[22] Dacă C. S. Peirce vorbea în general despre relații *medadice* (fără relate), J. Corcoran introduce expres noțiunea de *reguli nulare* („*nullary rules*"), „care nu necesită nici o premisă locală, dar și produc o concluzie locală *ab initio*". (Cf. J. Corcoran, *Remarks on Stoic Deduction*, în J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, 1974, p. 175).

[23] D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928, Dritte Auflage, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1949, p. 60.

[24] Cf. A. N. Prior, *op. cit.*, pp. 308—309.

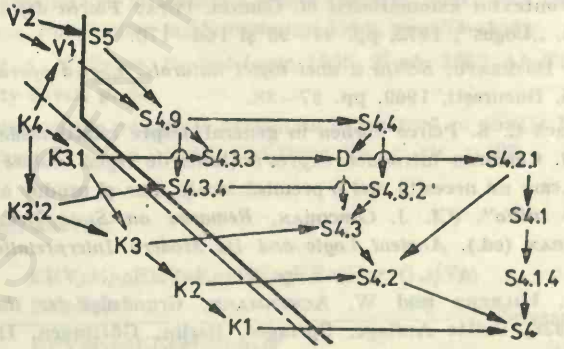
Se va remarca existența a două stiluri în axiomatizarea *ontologiei* pe fundamentul *prototeticii*, după cum se ia ca functor adițional primitiv „ε" sau „*U*", ultimul cu sensul „fiecare.. este..".

[25] Am ilustrat de această dată distribuția *tezelor* în general și nu a *axiomelor* deoarece nu există o axiomatică întru totul completă pentru silogistica tezială. J. Lukasiewicz dezvoltă sistemul *silogisticii* pe fundamentul logicii propozițiilor, dar nu-și adjudecă axiomatic tezele propoziționale de care are nevoie în fundamentarea tezelor silogistice. 14 la număr, acestea sînt postulate global, în virtutea verificabilității matriceale (?!). Cf. J. Lukasiewicz, *La syllogistique d'Aristote...*, p. 103.

[26] În *Logiques construites par une méthode de déduction naturelle* (Paris, Louvain, 1962), J. Dopp reconstituie în detaliu extensiunile (intrateoretice) din logica propozițională, sub auspiciile *deducției naturale*. Procesul se desfășoară similar în limitele deducției teziale curente, unde a și cunoscut, dealtfel, primele realizări (în ordinea inversă, a restringerilor — *parțializărilor* și *slăbirilor* — logicii „clasice"). Extensiunea *intrateoretică* a logicii propoziționale transpare în cadrul aceluiași sistem, dacă axiomele angajează într-o ordine progresivă functorii nedefiniți. O partiție corespunzătoare se va institui în acest caz în corpul teoremelor. Fiecărui grup de axiome afiliat unui functor îi va urma un microsistem care extinde concentric subsistemele precedente. Astfel ne apare, de pildă, axiomatica propozițională a lui Hilbert și Bernays din *Grundlagen der Mathematik*, I, Springer, Berlin, 1934, pp. 66 sq.

Foarte mult au fost studiate posibilitățile de extensiune intrateoretică în logica propozițională modală. Iată un fragment al inventarului proliferărilor sistemelor modale, însoțit de diagrama relațiilor de subsumare (după J. Jay Zeman, *Modal Logic. The Lewis-Modal Systems*, Oxford, At the Clarendon Press, pp. 276—277):

Sensul săgeților: de la sistemele care conțin, la cele conținute:



Sistemele din stînga liniei îngroșate nu sînt conținute de S5.
Sistemele din stînga liniei întrerupte sînt incompatibile cu S5.

S4.1 = S4+M13, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}pLppCMLpp$ or
M14 $\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}pLpLpCMLpLp$

S4.1.4 = S4+M15, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{C}pLppCLMLpp$

S4.2 = S4+M12, $\mathfrak{C}MLpLMp$

S4.2.1 = S4.2+M13

S4.3 = S4+M11, $A\mathfrak{C}LpqCLqp$

D (S4.3.1) = S4.3+M13

S4.3.2 = S4+M17, $A\mathfrak{C}LpqCMLqp$

S4.3.3 = D+M20, $\mathfrak{C}LMpCLMqCMKpqLMKpq$

S4.3.4 = S4.3.2+M20

S4.4 = S4+M16, $\mathfrak{C}pCMLpLp$

S4.9 = S4.4+M20

= S4+M21, $\mathfrak{C}CpLMpCCqLMqCMKpqLMKpq$

= S4.4+M18, $ACMLppCLMqMLq$

= S4+M19, $A\mathfrak{C}MLpLp\mathfrak{C}MLMqCqLq$

V1 = S4+M24, $ALpA\mathfrak{C}pq\mathfrak{C}pNq$

V2 = S5+M24

K1 = S4+M22, $\mathfrak{C}LMpMLp$

K2 = S4.2+M22

K3 = S4.3+M22

K3.1 = D+M22

K3.2 = S4.3.2+M22

K4 = S4.4+M22

[27] Cf. D. Hilbert und W. Ackermann, *op. cit.* Autorii germani ilustrează stilul axiomaticii curente, cu demonstrații incomplete, în sensul angajării unor reguli derivate de deducție și teoreme anterior obținute.

[28] Dependența respectivei axiome din sistemul lui Russell și Whitehead a fost demonstrată de P. Bernays (*Mathematische Zeitschrift*, vol. 25 (126), pp. 305—320). Alte posibilități de simplificare a sistemului $A-N$ din *Principia Mathematica* au fost studiate de J. Nicod, E. Götlind, H. Rasiowa ș.a. Cf. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 157; Prior, *Formal Logic*, p. 305.

Indicată de obicei ca *teoremă de asociativitate a disjuncției*, formula în atenție exprimă la rigoare o proprietate compusă, de asociativitate și comutativitate. Din $p \vee (q \vee r)$ prin asociativitate se obține $(p \vee q) \vee r$. Prin comutarea primului termen al noii disjuncții parvenim la $(q \vee p) \vee r$, iar printr-o nouă asociere $q \vee (p \vee r)$.

[29] Pentru prima dată sînt formulate reguli deductive exclusiv în A (disjuncție) și N (negație) de către E. L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, 1921 ; trad. fr. în J. Largeault (ed.), *Logique mathématique — Textes*, A. Colin, Paris, 1972, p. 32.

[30] În transpunerea consacrată de Łukasiewicz, demonstrația de mai sus ar putea fi concentrată și redată după cum urmează :

IV. $p/(pr)q, q/q(pr), r/\overline{pr} \times$ III. $p/pr - 3 \times$ D $- 4 \times$ II. $p/pr - 6 \times$ $\times$ IV. $p/pr, q/q(pr), r/\bar{p} - 8 \times$ D $- 9 \times$ II. $q/r - 11 \times$ IV. $q/q(pr), r/q$ $(pr) - 13$

13. $(q(pr))p \supset (q(pr))\ (q(pr))$

IV. $p/(q(pr))\ (q(pr)), q/q(pr), r/(q(pr))p \times$ I, $p/q(pr) - 16 \times$

$\times$ D $- 17 \times$ 13 $- 18 \times$ IV $/(q(pr))p, q/q(pr), r/\overline{p(qr)} - 20 \times$ D $- 21$

21. $(p(qr) \supset (q(pr))p) \supset (p(qr) \supset q(pr))$

IV. $p/rp, q/pr, r/\bar{r} \times$ III. $p/r, q/p - 24 \times$ D $- 25 \times$ II. $p/r, q/p - 27 \times$ IV. $p/r, q/pr, r/q - 29 \times$ IV. $p/qr, q/q\ (pr), r/p - 31$

31. $p(qr) \supset p(q(pr))$

III. $q/q(pr) \times$ IV. $p/p\ (q(pr)), q/(q(pr))p, r/\overline{p(q\bar{r})} - 34 \times$ D $- 35 \times 31 -$ $- 36 \times 21 - 37$

37. $p(qr) \supset q(pr)$ (q.e.d.)

[31] R. Martin, *Logique contemporaine et formalisation*, P.U.F., Paris, 1964, p. 21.

[32] Cf. J. Vuillemin, *Leçons sur la première philosophie de Russell*, A. Colin, Paris, 1968, pp. 262 sq.

[33] Situațiile tensionale apărute în cursa pentru reducerea și simplificarea grupului axiomatic își găsesc expresia în sistemul *antinomiilor metodei deductive*. Cf. P. Botezatu, *Valoarea deducției*, pp. 169 sq., în special discuția referitoare la antinomiile „simplificării", „abstractizării" și „riguroziății".

[34] *Simplicitatea* și *economicitatea* axiomelor nu merg nici ele mînă în mînă. Sistemul Hilbert — Bernays, de pildă, conține un număr apreciabil de axiome (5 grupe a cîte 3 axiome), dar simplicitatea intrinsecă a acestora este cea mai mare posibil. Între altele, acest sistem distinge rolul fiecărui functor în procesul demonstrativ.

[35] În măsura în care *legea logică* (teza sau nomoschema) reprezintă ea însăși o *structură* — forma invariantă a unor conținuturi variabile —, am putea defini sistemul ipotetico-deductiv ca *structură de structuri*.

[36] Neglijate de specialiști pînă în anii din urmă, *Cercetările logice* (1918—1923), neterminate, conturează un *al treilea* Frege, cel de după *ideografii*, circumspect în privința calculului logic, despărțind teoria propozițiilor de teoria generală a ecuațiilor și cuantificării. Cf. G. Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, trad. din germ. și *introducere* de Claude Imbert, Éd. du Seuil, Paris, 1971, pp. 35 sq.

[37] Este vorba de a treia *cercetare logică, Gedankengefüge (Compunerea gîndurilor)*, publicată ca și precedentele în *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 3 (1923—1926), pp. 36—51. Cf. ediția franceză citată, pp. 214—234.

[38] Frege analizează sub regim logic *compunerea* ideilor (gîndurilor) în sensul în care se interesează gramatica de compunerea propozițiilor (enunțurilor). Cum cercetarea poartă asupra operatorilor compunerii, am putea vorbi în spiritul concepției fregeene de *conectori ai ideilor*, într-o accepție mai naturală decît cea a „funcțiilor de adevăr", cu întrebuințare curentă.

[39] Va fi contribuit la această reconciliere a lui Frege cu limbajul natural și adresa mai largă a *Cercetărilor*, publicate într-o revistă filosofică, dar în primul rînd eșecul conștientizat al eforturilor sale de o viață dedicate limbajului formal, *ideografic*.

[40] În formularea autorului:

A este adevărat. *B* este adevărat, deci *(A și B)* este adevărat.	(compunerea ideilor de primul gen)
Non (A și B) este adevărat *A* este adevărat, deci *B* este fals.	(compunerea ideilor de al doilea gen)
A este fals. *B* este fals, deci *(Nici A nici B)* este adevărat	(compunerea ideilor de la treilea gen)
(A sau B) este adevărat. *A* este fals; deci *B* este adevărat.	(compunerea ideilor de al patrulea gen)
(Dacă B, atunci A) este adevărat. *B* este adevărat; deci *A* este adevărat.	(compunerea ideilor de al șaselea gen)

(Dacă C, atunci B) este adevărat.
(Dacă B, atunci A) este adevărat; deci
(Dacă C, atunci A) este adevărat.

(Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, pp. 218, 219, 220, 222, 228).

Dacă în cele două *Ideografii* ale sale (din *Begriffsschrift* și din *Grundgesetze*) Frege își asuma ca functori primitivi *replicația* și *negația*, redu-

cerea se realizează acum cu ajutorul *conjuncției* și al *negației*. Iată tabloul celor șase compuneri ale ideilor, întocmit de Frege însuși (cf. *loc. cit.*, p. 229):

(1) *A și B*;
(2) *Non (A și B)*;
(3) *(Non A) și (non B)*;
(4) *Non ((non A) și (non B))*;
(5) *(Non A) și B*;
(6) *Non ((non A) și B)*

După cum s-a putut observa mai sus, Frege nu indică nici o schemă inferențială pentru compunerea ideilor de al cincilea gen *(diferența logică conversă)*. Pe de altă parte, limitează lista la șase functori normali, excluzînd *echivalența*, *implicația directă* și negațiile acestora. Motivînd două din cele patru omisiuni, Frege consideră că „*A și (non B)*)" are aceeași semnificație cu „*(non B) și A*", fiind „expresia unei compoziții de al cincilea gen", iar negația acesteia, „*non (A și (non B))*", în mod firesc „expresia unei compuneri a ideilor de al șaselea gen" (cf. *ibidem*, p. 230).

Lista genurilor de compunere a ideilor reeditează o inversiune cultivată în toată opera fregeană. Logicianul german nu a considerat niciodată cazul lui „dacă *A*, atunci *B*", ci mereu „dacă *B*, atunci *A*", adică *replicația* („*A* este implicat de *B*") și nu *implicația* („*A* implică *B*"). Toți ceilalți functori se definesc, în schimb, în ordinea normală a argumentelor, *A — B*. Împrejurarea semnalată scapă de obicei autorilor care se referă la functorii promovați de Frege în logica propozițională, inclusiv autoarei franceze care traduce și comentează *Cercetările*. A se compara Frege, *Écrits...*, p. 229 și *Introducerea* la acestea, p. 54.

[41] G. Frege, *vol. cit.*, p. 234.

[42] Cf. *Introducerea* lui C. Imbert la *vol. cit.*, p. 35.

[43] *Ibidem*, p. 58.

[44] Cf. St. Jaśkowski, *On the Rules of Supposition in Formal Logic*, în „Studia Logica", *1* (1934), pp. 5—32; reprodus în volumul antologic S. McCall (ed.), *Polish Logic 1920—1939*, Clarendon Press, Oxford, 1967, p. 233.

[45] *Ibidem*, nota 1.

[46] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schlissen* I, II, în „Mathematische Zeitschrift", *39* (1934—1935), pp. 176—210, 405—431; trad. fr. și note de R. Feys și J. Ladrière în G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, P.U.F., Paris, 1955.

[47] Cf. St. Jaśkowski, *loc. cit.*, nota 128.

[48] G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, p. 4.

[49] *Ibidem*, p. 17.

[50] *Ibidem*, p. 19.

[51] Gentzen ne trimite la opera citată a lui Hilbert și Ackerman, *Grundzüge der theoretischen Logik*, p. 28, teorema 19. Pentru omogenitatea nota-

ției, am angajat simbolismul p,q,r în loc de X, Y, Z. De asemenea, am exprimat disjuncția prin simbolul caracteristic, la autorii menționați această operație fiind redată prin simpla juxtapunere a termenilor.

[52] Exemplele sînt discutate de Gentzen la pp. 17—18 (ed. fr.). Precizăm că interesul autorului german se concentrează asupra *logicii predicatelor*, clasică și intuiționistă. Noi vom rămîne în continuare în domeniul logicii propozițiilor, urmărind destinul enunțului inițial, de asociativitate a disjuncției, în diversele orizonturi ale sistematizării deductiv-axiomatice.

[53] Cf. GENTZEN, *Recherches*, p. 22. În simbolismul autorului, majusculele gotice figurează variabilele propoziționale și funcționale, majusculele grecești exprimă lanțuri de formule, iar minusculele gotice reprezintă variabilele și constantele individuale.

[54] Ordine care se îndepărtează întrucîtva de raționamentul real. Căci, spune Gentzen însuși, „1) în raționamentul real, linearitatea gîndirii impune o succesiune liniară a propozițiilor; 2) de obicei, în raționamentul real trebuie să folosești de mai multe ori un rezultat odată obținut, pe cînd ordinea genealogică nu permite, în fiecare caz, decît o singură aplicație a unei formule derivate. Aceste două divergențe, adaugă Gentzen, ne permit să dăm o definiție potrivită conceptului de derivație, și n-au nimic esențial" (G. GENTZEN, *Recherches*, pp. 19—20). Pentru demonstrație, *ibidem*, p. 25.

[55] GENTZEN, *Recherches*, p. 27.

[56] *Ibidem*, p. 28.

[57] Mai exact, ar fi trebuit poate să se spună „calcule în formă de deducție" (nota trad., J. LADRIÈRE; *Recherches*, p. 41).

[58] *Ibidem*, p. 41.

[59] R. FEYS, *Prefață* la *Recherches*, p. VIII. În nota E^* din același volum (pp. 29—34), autorul belgian dotează regulile din calculul N cu o notație explicită a supozițiilor, dispensîndu-se de rolul parantezelor. Autorul respectiv explicitează, ca reguli suplimentare ale N — deducției, o regulă pe care am putea s-o numim „*a conservării*", apoi regulile *atenuării*, *permutării* și *contracției*, introduse de Gentzen în cadrul L — deducției.

[60] Cf. GENTZEN, *Recherches*, p. 42. După R. FEYS (nota A^*, *Recherches*, pp. 1—2), Gentzen a împrumutat de la P. Hertz notația secvențelor și regulile exprimate prin *schemele de structură*, dar n-a putut găsi la acesta *regulile operatorii*, de introducere și eliminare a conectivelor.

[61] Cf. J. DOPP, *Logiques construites par une méthode de la déduction naturelle*, 1962, p. 12.

[62] GENTZEN, *Recherches*, pp. 11—12, 42.

[63] Semnul $\rightarrow$ nu face decît să suplinească în aceste cazuri pe uzualul $\vdash$, impus pentru distingerea tezelor (axiome sau teoreme demonstrate) dintr-un sistem ipotetico-deductiv.

[64] Cf. GENTZEN, *Recherches*, p. 46. Pentru comentariu, J. DOPP, *op. cit.*, pp. 13 sq.

[65] GENTZEN, *Recherches*, p. 45.

[66] *Ibidem*, pp. 42—44.

[67] *Ibidem*, p. 47.

[68] *Ibidem*, pp. 47—48.

[69] *Ibidem*, pp. 27—28.

[70] Alături de *formalismele combinatorii*, care, îngăduind o nouă codificare a conceptelor matematice fundamentale de *funcție* și *demonstrație*, s-au ilustrat eficient în problemele care pun în cauză structura și proprietățile globale ale formalismelor logice uzuale. Printre acestea menționăm tentativa unui „formalism constructiv" în ținuta unui *calcul al ecuațiilor* (R. L. GOODSTEIN, *Constructive Formalism. Essays on the foundations of Mathematics*, University College Leicester, 1951), și, în primul rînd, elaborările metamatematice pe temeiul *deducției naturale* însăși.

Cît privește aportul intuiționiștilor la impunerea *constructivismului*, citățm opinia lui H. B. Curry: „Noțiunea de constructibilitate este de mare importanță pentru matematică. Intuiționiștii au deplină dreptate cînd subliniază această importanță și ei au participat desigur la dezvoltarea sa. Totuși, ei nu sînt singurii responsabili de aceasta. (..) Îmbunătățirile moderne ale noțiunii de constructibilitate au fost făcute de către persoane care au fost inițial formaliști." (H. B. CURRY, *Foundations of Mathematical Logic*, 1963, cap. I; trad. rom. în antologia *Logică și filozofie*, Ed. politică, București, 1966, p. 221).

În contextul analizei noastre, noțiunea de *constructivism* reclamă o înțelegere mai restrînsă. Vom califica constructivistă procedura demonstrativă (respectiv metoda de decizie) care ne îngăduie să construim concluzia unei scheme deductive din premisele acesteia, iar pentru domeniul tezelor — acea procedură care ne conduce la formula de demonstrat prin intermediul constituantelor sale, angajate în jocul supozițiilor sau al secvențelor fundamentale. Într-o astfel de accepție, *constructivism axiomatic* înseamnă standardizare și autonomizare a teoremelor sistemului.

[71] Cf. R. FEYS, nota C* la *Recherches*, p. 35.

[72] GENTZEN, *Recherches*, p. 24.

[73] R. FEYS, *loc. cit.*

[74] *Ibidem*, p. 30.

[75] ST. JAŚKOWSKI, *loc. cit.*, pp. 234—235. În afara notației poloneze pentru functori, autorul mai folosește simbolul prefixat *S*, al supoziției.

[76] Pentru bibliografia ameliorărilor din tehnica deducției naturale cf. T. GRÜNBERG, *Symbolic Logic*, I—II, Ankara, 1969, p. 121.

[77] Inedită în raport cu sistemul deducției naturale al lui Gentzen. Regula a fost introdusă de E. L. POST (cf. *supra*, nota 29).

[78] J. Porte, *Recherches sur la théorie générale des systèmes formels*, p. 21.

[79] Cf. P. Botezatu, *Schiță a unei logici naturale*, p. 82.

[80] La Gentzen, schema de *introducere a implicației* era indicată prin punerea premisei p în paranteze. Noua simbolizare este mai sugestivă, mai ales în aplicațiile afective ale regulii. Cf. J. M. Anderson and H. W. Johnstone, *Natural Deduction. The Logical Basis of Axiom Systems*, Wadsworth, Belmont, 1962, p. 288.

[81] T. Grünberg, *op. cit.*, p. 125.

[82] Ideea *teoremei deducției* și prima ei demonstrație pentru un sistem particular sînt datorate lui J. Herbrand. Impunerea teoremei ca principiu metodologic general pentru sistemele logistice este înfăptuită de A. Tarski. (Cf. A. Church, *op. cit.*, p. 164). Numele de „teoremă a deducției" *(Deduktionstheorem)* este consacrat de Hilbert și Bernays în *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, p. 155; vol. 2, p. 387.

Teorema deducției a lui Tarski-Herbrand,

Dacă $x \in \mathrm{Cn}_A(X + \{y\})$, atunci $Cxy \in \mathrm{Cn}_A(X)$,

este numită de Stanisław J. Surma *(Twierdzenia o dedukcji niewprost*, „Studia Logica", XX, 1967, pp. 151—159) „teoremă a deducției directe". Demonstrația prin reducere la absurd este plasată sub controlul unei „teoreme a deducției indirecte", în sensul tare,

Dacă x, $Nx \in \mathrm{Cn}_A(X + \{y_1, y_2, \ldots, y_n, Nz\})$, atunci $Cy_1Cy_2 \ldots Cy_nZ \in \mathrm{Cn}_A(X)$,

respectiv în sensul slab,

Dacă x, $Nx \in \mathrm{Cn}_A(X + \{y_1, y_2, \ldots, y_n, z\})$, atunci $Cy_1Cy_2 \ldots Cy_n Nz \in \mathrm{Cn}_A(X)$.

În școala poloneză, un studiu avansat al teoremei deducției mai realizează Witold A. Pogorzelski în *The Deduction Theorem for Łukasiewicz many-valued propositional Calculi (rev. cit.*, XV, 1964, pp. 7—19) și în *Przegląd twierdzeń o dedukcji dla rachunków zdań (A Survey of Deduction Theorems for the Propositional Calculi, ibidem*, pp. 163—179).

[82a] Pas cu pas, derularea și justificarea reducerii la absurd a unei teze Y pot fi urmărite după schemele alternative (1) și (2), iar pentru cazul unei teze negative, $\bar{Y}$, reducerile la absurd vor fi explicitate prin schemele (1′) și (2′):

	1. $\bar{Y}$	supoziție absurdă;
	⋮	
	n. $Z \,\&\, \bar{Z}$	
	$n+1.\ \bar{Y} \supset (Z \,\&\, \bar{Z})$	1—n: demonstrație condițională;
	$n+2.\ -(Z \,\&\, \bar{Z})$	principiul noncontradicției;
	$n+3.\ Y$	$n+1-n+2$: *Modus Tollens*;
(1)	$n+4.\ Y$ (q.e.d.)	$n+3$: eliminarea dublei negații.

	1. $\bar{Y}$	supoziție absurdă;
	⋮	
	m. Z	
	n. $\bar{Z}$	
	n + 1. $Z \vee \bar{Y}$	m: adiționare (introducerea lui V);
	n + 2 $\bar{\bar{Y}}$	n + 1 — n: silogism disjunctiv (eliminarea lui V)
	n + 3. $\bar{Y} \supset \bar{\bar{Y}}$	1 — n + 2: demonstrație condițională;
	n + 4. $\bar{\bar{Y}} \vee \bar{Y}$	n + 3: definiția lui $\supset$ prin V;
	n + 5. $\bar{Y}$	n + 4: idempotență;
(2)	n + 6. Y (q.e.d.)	n + 5: eliminarea dublei negații.

	1. Y	supoziție absurdă;
	⋮	
	n. $Z \,\&\, \bar{Z}$	
	n + 1. $Y \supset (Z \,\&\, \bar{Z})$	1 — n: demonstrație condițională;
	n + 2. $-(Z \,\&\, \bar{Z})$	principiul noncontradicției;
(1′)	n + 3. $\bar{Y}$ (q.e.d.)	n + 1 — n + 2: *Modus Tollens*.

	1. Y	Supoziție absurdă;
	⋮	
	m. Z	
	n. $\bar{Z}$	
	n + 1. $Z \vee \bar{Y}$	m: adiționare;
	n + 2. $\bar{Y}$	n + 1 — n: silogism disjunctiv;
	n + 3. $Y \supset \bar{Y}$	1 — n + 2: demonstrație condițională;
	n + 4. $\bar{Y} \vee \bar{Y}$	n + 3: definirea lui $\supset$ prin V;
(2′)	n + 5. $\bar{Y}$(q.e.d.)	n + 4: idempotență.

Într-o formă puțin modificată, schemele (1′) și (2′) se găsesc în J. E. Wiredu, *On Reductio Ad Absurdum Proofs*, *International Logic Review*, N. 13, 1976, pp. 90 sq. *Eliminarea dublei negații*, în postura pretinsă de schemele (1) — (2), ca și *demonstrația indirectă* însăși cad sub incidența restricțiilor intuiționiste. A se vedea în acest sens Al. Surdu, *Elemente de logică intuiționistă*, Ed. Academiei, București, 1976, p. 52.

[83] *Apud* R. Blanché, *Logique et son histoire d'Aristote à Russell*, p. 223; cf. P. Ioan, *Relativizarea afirmației și negației în logica formală*. „Analele Universității *Al. I. Cuza* din Iași", XXI (1975), III — Istorie — Filosofie, p. 77.

[84] P. Botezatu, *Schiță a unei logici naturale*, cap. 4 și 8.

[85] *Ibidem*, 4.1.3, pp. 85—88.

[86] Cf. *ibidem*, modul B2.1, p. 95. Am neglijat cu bună știință transcrierea minorei ca propoziție exclusivă, așa cum figurează ea în modul *operatorilu Cesare*, deoarece trebuie să ne asigurăm ca termen de comparație demonstrația modului clasic.

[87] Cititorul va găsi în J.-B. Grize, *Logique moderne*, I, Gauthier-Villars, Mouton, 1969, pp. 63 sq., demonstrații de acest gen pentru cazul altor moduri.

[88] Cf. *ibidem*, pp. 9 sq. și 53 sq., unde sînt introduse succesiv regulile menționate de noi în serviciul demonstrației modului *Cesare*.

[89] Regula *I* ex. (eliminarea intersecției), $\dfrac{XY = 0 \quad X \neq 0}{Y = 0}$ $\dfrac{XY = 0 \quad Y \neq 0}{X = 0}$,

nu figurează în formalismul LOT, deoarece nu este reclamată în demonstrațiile directe de care uzează acesta.

[90] În demonstrația de față ca și în precedenta supoziția absurdă — (SeP) ne conduce prin intermediul echivalenței — (SeP) = SIP la SIP.

[91] T. J. Smiley, *What is a Syllogism?*, în „Journal of Philosophical Logic", 2 (1973), p. 141. Menționăm că autorul formulează cele patru reguli primitive în manieră naturală: „din.. inferă..". Urmează, însă, definiția recurentă a *deducției formale* (pp. 141—142) și convenția după care „$X \| - Q$" se traduce prin „există o deducție a lui Q din X".

[92] Cf. *ibidem*, p. 142.

[93] P. Ioan, *Structura silogismului*, în „Analele Universității *Al. I. Cuza* din Iași", XIX (1973), seria IIIb, pp. 53—54.

[94] Demonstrația tezei *Cesare* în J. Łukasiewicz, *La syllogistique d'Aristote*, p. 107, este *incompletă* în sensul precizat pe parcursul expunerii, că se sprijină pe alte teoreme, deja demonstrate.

[95] Cf. *ibidem*, p. 102.

[96] Cf. J. Corcoran, *loc. cit.*, în special § 4; de asemenea T. J. Smiley, *loc. cit.*, în special pp. 140—153.

[97] Cf. J. Porte, *op. cit.*, p. 29.

[98] *Ibidem*, cap. 6 și urm.

Capitolul III

[1] Cf. P. Ioan, *Structura silogismului*, în *loc. cit.*, pp. 49 sq; *Idem*, *La dualité des structures syllogistiques*, în „Revue Roumaine des Sciences Sociales", Série Philosophie et Logique, *XX* (1976), 3, pp. 315—326.

[2] Gentzen, *Recherches*, p. 17.

[3] *Ibidem*, p. 4.

[4] Cf. P. Ioan, *Relativizarea afirmației și negației în logica formală*, în *loc. cit.*, pp. 76—79.

[5] În contextul axiomaticii curente, Wittgenstein conchisese că: „Demonstrația propozițiilor logice constă în aceasta că le putem crea din alte propoziții logice prin aplicarea succesivă a unor operații oarecare, care generează din primele iarăși tautologii (și dintr-o tautologie urmează numai tautologii). Natural, acest mod de a arăta că propozițiile ei sînt tautologii nu este esențial pentru logică. Și anume, din cauză că propozițiile de la care începe demonstrația *trebuie să arate chiar fără demonstrație, că ele sînt tautologii.*" (*Tractatus logico philosophicus*, prop. 6.126 *apud* A. Dumitriu, *Teoria logicii*, pp. 94—95). Or, dacă după același autor *„în logică fiecare propoziție este forma unei demonstrații"* (*ibidem*, prop. 6.1263), fiecare tautologie arătînd ea singură că este tautologie (prop. 6.1265), faptul respectiv este probat în limitele deducției naturale, care aduce avantajul considerabil al autonomizării tezelor sistemului și al transformării tuturor în teoreme, *toate* arătînd acum *prin demonstrație* că sînt tautologii.

[6] Cf. J. Ladrière, *L'explication en logique*, în vol. col. *L'explication dans les sciences*, Flammarion, Paris, 1973, pp. 23—24.

[7] *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw Hill Book Company, New York, 1973; de asemenea, *The inferential approach to logical calculs*, în „Logique et analyse", *3* (1960) și *4*(1961).

[8] J. Ladrière, *loc. cit.*, pp. 27—37.

[9] *Ibidem*, p. 31.

[10] În măsura în care raporturile dintre teoriile logice sînt de *extensiune* și nu de *transpoziție*, deducția naturală reprezintă un instrument excelent al ierarhizării interteoretice. Cf. *supra*, cap. II, n. 26.

[11] Curry, *Foundations*, cap. 6, pp. 254—310; Ladrière, *loc. cit.*, pp. 36—37.

[12] Ladrière, *loc. cit.*, p. 38.

[13] *Ibidem*, p. 39.

[14] *Ibidem*, p. 54.

[15] *Ibidem*, p. 55.

[16] *Ibidem*, p. 54.

[17] *Ibidem*, p. 55.

[18] *Ibidem.*

[19] *Ibidem*, p. 56.

[20] *Ibidem*, p. 40.

[21] *Ibidem.*

[22] Gentzen, *Recherches*, p. 49.

[23] Cf. P. Lorenzen, *Métamathématique*, trad. din germ., Éd. Mouton, Paris, 1967, pp. 30 sq.

[24] Metoda *tabelelor semantice* a fost descrisă de E. W. Beth în 1955 (cf. între altele *Remarks on Natural Deduction*, „Indag. Math.", 17, pp.

322—325; *Semantic Entailment and Formal Derivability*, „Mededelingen", Bd. 18, nr. *13*, pp. 309—342; *Construction sémantique de la logique intuitioniste*, în *Actes du Colloque International de Logique mathématique*: „*Le raisonnement en mathématique et en sciences expérimentales*", Paris, 20 IX—X 1955, Éd. du C.N.R.S., Paris, 1958, pp. 77—83). Pentru ultimele considerații asupra metodei, cf. E. W. Beth, *Aspects of Modern Logic*, D. Reidel, Dordrecht, 1970, pp. 10—19; 132—135.

[25] La rigoare, ținuta procedurii lui Beth este *sintactico-semantică*. Cf. R. Martin, *Logique contemporaine et formalisation*, p. 184: „anumite metode zise semantice, ca metoda tabelelor semantice a lui Beth, se situează la jumătatea drumului între semantica pură și sintaxă. Ele permit, sprijinindu-se pe reguli semantice a căror semnificație este evidentă, să se cerceteze dacă o expresie este sau nu o teză". De fapt, în ceea ce-o privește, *metoda tabelelor semantice* se sprijină deopotrivă pe reguli *semantice* și pe reguli *sintactice*, analiza formulei date și a subformulelor acesteia *în termeni de adevăr și falsitate* alternînd cu sinteza prilejuită de aplicarea *regulilor operatorii de deducție*.

[26] Reducerea indirectă în varianta *metodei antilogismului* este datorată Christinei Ladd-Franklin, *On the Algebra of Logic*; Johns Hopkins, *Studies in Logic*, 1880; Cf. C. I. Lewis, *Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, 1918, pp. 109—110, 195—197; Ralph M. Eaton, *General Logic. An introductory survey*, Ch. Scribner's Sons, New York, 1959, pp. 132—140.

[27] E. W. Beth, *Aspects of Modern Logic*, p. 17.

[28] J. J. Zeman, *Modal Logic. The Lewis-Modal System*, Clarendon Press, Oxford, 1973, cap. IV: *Groundwork — Propositional Logic and Tableaux*.

[29] În figurația propusă, Zeman este îndreptățit să vorbească de *sistemul* tabelelor semantice aferent formulei testate.

[30] Zeman, *op. cit.*, pp. 63—64, 66 și 75.

[31] În orice caz, procedura de decizie a lui Zemann este mai aproape de fundamentarea formulelor logice în manieră *sintactică*. Față de varianta originară, a lui Beth, aceasta se remarcă prin grad maxim de standardizare, sens univoc, re-ductiv, transparență deplină la calea inversă, a demonstrației prin introducerea succesivă a operatorilor în secvențe fundamentale valide.

[32] Posibilitatea includerii *analizei inferențiale* în domeniul analizei algoritmice a fost luată în studiu de Hao Wang în 1953, fiind ilustrată în *A Variant to Turing's Theory of Computing Machines* („Journal Assoc. Comp. Mach.", *4* (1957), pp. 88—92), în studiul de referință *Toward Mechanical Mathematics* („IBM Journal for Research and Development", vol. 4, 1960; reprodus în K. M. Sayre, F. J. Crosson (eds.), *The Modeling of Mind. Computers and Intelligence*, Simon and Schuster, New York; de asemenea, în Hao Wang, *A Survey of Mathematical Logic*, Peking, 1962,

trad. rom. sub titlul *Studii de logică matematică*, Ed. științifică, București, 1972, pp. 218—260), într-un alt memoriu publicat în *ACM communication*, 1960, pp. 220—234 (partea I) și în *Bell Systems Journal*, 1961, pp. 2—41 (partea II) etc. După Hao Wang, în același domeniu *al analizei inferențiale* intră în măsură mai mare sau mai mică lucrările lui Burks-Warren-Wright, Collins, Davis, Newell-Shaw-Simon, Gelernter, Gilmore, Prawitz, Davis-Putnam ș.a. (a se vedea bibliografia respectivă în Hao Wang, *Studii de logică matematică*, pp. 259—260).

[33] Cf. A. B. Turowicz, *Sur une méthode algébrique de vérification des théorèmes de la logique des énoncés*, în *Studia Logica*, XIX (1960), pp. 28 sq.

[34] Cf. Hao Wang, *op. cit.*, p. 247.

[35] *Ibidem*, p. 218.

[36] *Ibidem*, pp. 252—253 (*din Apendice* I, *Exemple de teoreme tipărite după programul I)*. Pentru dicționarul folosit cf. *ibidem*, pp. 225—226.

[37] *Ibidem*, pp. 253—254 (din *Apendice* II, *Exemple de teoreme tipărite după programul II)*.

[38] *Ibidem*, p. 250.

[39] *Ibidem*.

[40] V. M. Gluşkov, *Vvedenie v kibernetiku*, Izd. Akad. nauk Ukrainskoi S.S.R., Kiev, 1964, cap. VI 2—3, tradus în vol. antologic *Logică și filosofie*, Ed. politică, București, 1966, pp. 402—403.

[41] În *Apendice* III—IV la studiul *Către o matematică mecanică* (vezi *op. cit.*, pp. 254—257), Hao Wang ilustrează teoreme tipărite de calculator după programul III, din porțiunea formulelor fără cuantificatori și din porțiunea AE, a formulelor în care nici un cuantificator pozitiv nu este guvernat de un cuantificator negativ.

[42] H. Wang, *loc. cit.*, p. 229.

[43] *Ibidem*, p. 219.

[44] M. Gluşkov, *loc. cit.*, p. 401 ; (*s.n., P.I.*)

[45] H. Wang, *loc. cit.*, p. 251.

[46] Gentzen, *Recherches*, p. 43.

[47] A. Dumitriu, *Teoria logicii*, p. 333.

[48] P. Botezatu, *Semiotică și negație*, p. 115.

[49] *Ibidem*. A se compara cu distincția noastră între sistemele *„de tip anatomic"* (din axiomatica curentă cu demonstrații incomplete) și cele *„de tip fiziologic"*.

[50] P. Botezatu, *Semiotică și negație*, p. 113.

[51] J. Corcoran, *Remarks on Stoic Natural Deduction*, în *loc. cit.*, p. 175.

[52] S. C. Kleene, *Logique mathématique*, 1971, p. 43, n. 28.

[53] Aristotel, *An. pr.* I, 1, 24 b ; în Aristotel, *Organon*, II, Ed. științifică, București, 1958, p. 6.

J. M. Bocheński, G. Patzig, O. Bird, T. Kotarbinski ș.a. consideră această definiție aristotelică a *silogismului* ca fiind valabilă pentru

deducție în genere. Cf. AL. SURDU, *Definiția aristotelică a silogismului*, § 5, în *Probleme de logică*, IV, Ed. Academiei, București, 1972, pp. 321 sq.

[54] Cf. C. I. LEWIS, *Implicație și deductibilitate* (cap. din C. I. LEWIS and C. H. LANGFORD, *Symbolic Logic*, 2[d] ed., New York, 1959), în vol. antologic *Logică și filosofie*, 1966, pp. 252–282.

[55] În seria încercărilor de ameliorare a relației implicative logico-formale, menționăm implicația *analitică* a lui W. T. Parry, implicația *logică* a lui A. E. Emch, implicația *naturală* a lui E. Kalla, implicația *rezonabilă* a lui H. Reichenbach, implicația *riguroasă* a lui W. Ackermann, implicația *plină* a lui H. Freudenthal, implicația — *entailment* a lui A. R. Anderson și N. D. Belnap etc. Cf. R. Blanché, *Raison et discours. Défense de la logique reflexive*, J. Vrin, Paris, 1967, p. 206; de asemenea, P. IOAN, *The Paradoxis of Implications*, în „Acta Logica", XIV (1971), p. 84.

[56] În aceste circumstanțe, confuzia dintre conectiva implicațională și relația deducțională reprezintă o confuzie între limbajul-obiect și metalimbaj. Denivelarea dintre implicație și deducție se răsfrînge în planul valabilității formelor unei scheme cum este *modus ponendo ponens*. O interpretare (A, B) satisfăcută fiind de regula

$$\frac{\rightarrow A \qquad \rightarrow A \supset B}{\rightarrow B},$$

va fi valabilă, de asemenea, pentru regula

$$\frac{\rightarrow A \qquad A \rightarrow B}{\rightarrow B},$$

dar nu și reciproc. În literatura de specialitate, trecerea ilicită de la deductibilitate la condiționalitate, adică de la o relație mai abstractă și mai generală la una mai concretă și particulară („implicația materială") este sancționată prin „regula confuziei" (Dana Scott):

$$\frac{A \rightarrow B}{? \rightarrow A \supset B}.$$

[57] Cf. GR. C. MOISIL, *Sur la logique positive* („Acta Logica", I 1958); *Logica clasică a propozițiilor de tip superior* (*Studii și cercetări matematice*, XX (1968), nr. 2); *Sur le calcul des propositions de type supérieur dans la logique de Lukasiewicz à plusieurs valeurs* („Acta Logica", X–XI (1967));

trad. și reed. în fr. în Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non chrysippienne*, Ed. de l'Acad., București, 1972.

[58] Gr. C. Moisil, *Essais*, pp. 459—460.

[59] *Ibidem*, p. 510.

[60] *Ibidem*, p. 460.

[61] *Ibidem*.

[62] *Ibidem*, p. 524.

[63] *Ibidem*, p. 461.

[64] *Ibidem*, p. 471.

[65] P. Suppes, *Introduction to Logic*, D. Van Nostrand, New York, 1957, 1959, p. 28.

Încheiere

[1] Pentru distincția aristotelică dintre „silogismul cauzei" și „silogismul simplului fapt", respectiv răsfrîngerea acesteia în discuția structurii și funcțiilor raționamentului categoric consacrat de Stagirit, a se vedea P. Botezatu, *Valoarea deducției*, pp. 13 sq. De asemenea, P. Ioan, *Structura silogismului*, „Analele Universității *Al. I. Cuza* — Iași", III b, 1973, pp. 50—52.

[2] L. Löwenheim, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, în „Math. Ann.", *76* (1915), pp. 447—70.

[3] Cf. J. Van Heijenoort, *La logique comme calcul et la logique comme language*, „Épistémologie Sociologique", *7*, I 1/2, 1969, pp. 67—69.

[4] G. Kreisel, J. L. Krivine, *Eléments de logique mathématique*, Paris, 1967, pp. 211 sq.

[5] În coordonate similare, demonstrația (deductivă) reprezintă *sinteza* relativă a unui enunț din alte enunțuri, pe baza unor legi operatorii. Cf. Fl. Țuțugan, *Sinteza în silogism*, „Revista de Filosofie", XXIX, 3—4, 1943, pp. 239 sq.

[6] Cf. Ilie Pârvu, *Raționalitatea științei și dezvoltarea cunoașterii. Modelul epistemologic evoluționist al lui St. Toulmin*, în Ilie Pârvu (ed.), *Materialismul dialectic și științele moderne*, XVII: *Concepții asupra dezvoltării științei. Direcții de reconstrucție și modele sistematice ale evoluției științei*, Ed. politică, 1978, pp. 258—296; de asemenea, Alexandrina Pârvu, *Modele istorice fundamentale ale cunoașterii științifice: știința categorico-deductivă și știința ipotetico-deductivă*, *vol. cit.*, pp. 337—359.

[7] Mario Georgescu, Cosmin Georgescu, *O abordare sistemică a structurii și dinamicii științei: de la mecanica newtoniană la teoria relativității*, *vol. cit.*, p. 363.

[8] *Ibidem*, pp. 364—365.

VOCABULAR SIMBOLIC

$p, q, \ldots$	variabile propoziționale (formule oarecare)
$x, y, \ldots$	„ „ „ „
$A, B, \ldots$	„ „ „ „
$P, Q, \ldots$	„ „ „ „
$\mathfrak{M}, \mathfrak{B}, \ldots$	„ „ „ „
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	„ „ „ „
$\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots$	mulțimi finite (eventual vide) de formule
$x, y, z, \ldots$	„ „ „ „ „ „
A	enunț adevărat oarecare
F	„ fals „
f	„ „ „
Λ	„ „ (absurditate)
$S, P, M, \ldots$	termeni silogistici (variabile silogistice)
$X, Y, Z, \ldots$	„ „ „ „
$a, b, \ldots$	termeni clasiali (variabile clasiale)
$A, B, \ldots$	„ „ „ „
Fxy, Gx, etc.	funcții predicaționale
$\supset (C, B)$	implicația (functor interpropozițional)
$\subset (H)$	replicația „ „
$\& (K, C)$	conjuncția „ „
$\mathrm{V} (A, D)$	disjuncția „ „
$\equiv (E, I)$	echivalența „ „
$\not\supset$	diferența logică „ „
$\not\subset$	diferența conversă „
$\mid$	incompatibilitatea „
J	disjuncția exclusivă „
$- (N, \neg, \sim)$	negația propozițională
$-$	complementarierea (negația clasială, respectiv conceptuală)
δ	variabilă de functor interpropozițional

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$\cup$	reuniune (functor interclasial)
$\cap$	intersecţie ,, ,,
$\in$	apartenenţă (functor clasial)
A (a)	toţi..sint.. (functor silogistic)
E (e)	nici un.. nu este ,, ,,
I (i)	unii..sint.. ,, ,,
O (o)	unii..nu sint ,, ,,
$=$ $(=_{df.}, \rightarrow)$	functor definiţional
- -/ ..	- - se substituie prin ..
$S_{--A/}$	în A,- - se substituie prin..
$\rightarrow$ $(\vdash)$	secvenţă (de ordinul unu)
$\Longrightarrow$	secvenţă (schemă deductivă) de ordinul doi
$\Longrightarrow$	,, ,, ,, ,, ,, trei
$\mathfrak{K}$	concatenare a formulelor (sau şirurilor de formule)
$\mathfrak{A}$	funcţie de axiomatizare
$\mathfrak{D}$	domeniul funcţiei de axiomatizare
$\mathfrak{D}'$	codomeniul funcţiei de axiomatizare
$\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$,..	teze (axiome sau teoreme), din $\mathfrak{D}$ sau $\mathfrak{D}'$
$\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}'$,..	reguli deductive, din $\mathfrak{D}$ sau $\mathfrak{D}'$
$\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$,..	sisteme ipotetico-deductive
$\mathfrak{S}$	alfabetul (mulţimea de simboluri simple ale) unui sistem ipotetico-deductiv
$\mathfrak{F}$	lexicul (mulţimea de formule bine formate ale) unui sistem ipotetico-deductiv
$\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A})$	mulţimea axiomelor (schemelor de axiome) dintr-un sistem ipotetico-deductiv
$\mathfrak{R}$	mulţimea regulilor deductive, primitive dintr-un sistem ipotetico-deductiv
$\mathfrak{H}$	relaţie deducţională
$\mathfrak{N}$	numerotaţia unui sistem ipotetico-deductiv

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

SOMMAIRE

Introduction : L'AXIOMATISATION EN TANT QUE RELATION 7

I. LES FORMES HISTORIQUES DE L'AXIOMATIQUE ET LEURS RÉPERCUSSIONS SUR LE CONCEPT ACTUEL DE LA MÉTHODE 17

1. La formalisation — critère historiographique de l'axiomatique 17
2. La critique dévalorisante 21
2.1. La théorie de la déduction ne peut pas être une théorie déductive 21
2.2. Les principales objections contre l'axiomatique formalisée 26
2.2.1. L'évacuation de l'intuition 27
2.2.2. La non-évidence et la relativisation des axiomes 29
2.2.3. La relativisation des interprétations 31
2.2.4. Pluralisme logique 34
2.2.5. L'objection psychologique (pédagogique) 37
2.2.6. Auto-anihilation ? 38
3. La réconciliation par une dialectique valorisante 39
3.1. Avantages de l'axiomatique au stade formaliste 39
3.2. Le cadre de référence pour le jugement valorisant 41
3.3. Conclusions sur la discussion relative au critère évolutive 45

II. FORMES LOGIQUES DE LA MÉTHODE AXIOMATIQUE 47
1. L'axiomatique thésiale 48
1.1. L'axiomatique à fondement thésial et à démonstrations complètes 49
1.1.1. Le statut des règles de substitution dans l'économie du formalisme 49
1.1.2. La condition des définitions dans les formalismes déductives 53
1.1.3. Critères typologiques pour règles et thèses 57
1.1.4. L'illustration du mécanisme déductive 59
1.2. Le style courant de l'axiomatique thésiale 64

1.3. Les systèmes de thèses sans axiomes 69
1.3.1. Les calculs axiomatiques du type *N* 72
1.3.2. Les calculs axiomatiques du type *L* 76
1.4. La déduction naturelle à démonstrations complètes 81
2. L'axiomatique inférentielle 88
2.1. Modalités de systématisation des schémas déductifs propositionnels 88
2.1.1. La démonstration directe 89
2.1.2. La démonstration conditionnelle. 92
2.1.3. La démonstration indirecte 94
2.2. L'axiomatique inférentielle du type R — R 97
2.3. L'axiomatique inférentielle du type R × R' — R 102
2.4. La systématisation des schémas déductifs dans les conditions de l'extension du système de thèses 104
3. Récapitulation typologique 107

III. CONSIDÉRATIONS MARGINAUX À LA DIVERSIFICATION DE L'AXIOMATIQUE 113
1. Hiérarchisation intra-théorique et rôle explicatif augmenté 113
2. Constructivisme et standardisation 118
2.1. Les sens de la démarche fondationnelle réalisée par la *déduction naturelle* : le déductif proprement-dit et le réductif 118
2.2. Le caractère réductif de la méthode des „tableaux sémantiques" (Beth) 120
2.3. L'adaptation de l'abduction par tableaux sémantiques au domaine des séquences 125
2.4. La décision par démonstration et l'automatisation de la démarche fondationnelle 127
3. Généralisation méthodologique et unification téléologique. 137

En guise de conclusions : AU DELÀ DE L'AXIOMATIQUE . . . 146
Résumé 150
Notes 161
Vocabulaire symbolique 191

CUPRINS

Introducere: *AXIOMATIZAREA CA RELAȚIE* 7

I. FORMELE ISTORICE ALE AXIOMATICII ȘI RĂSFRÎNGERILE ACESTORA ÎN CONCEPTUL ACTUAL AL METODEI 17

1. Formalizarea — criteriu istoriografic al axiomaticii. 17
2. Critica devalorizatoare 21
2.1. Teoria deducției nu poate fi o teorie deductivă 21
2.2. Principalele obiecții la adresa axiomaticii formaliste . . . 26
2.2.1. Eliminarea intuiției 27
2.2.2. Nonevidența și relativitatea axiomelor 29
2.2.3. Relativizarea interpretărilor 31
2.2.4. Pluralism logic 34
2.2.5. Obiecția psihologică (pedagogică) 37
2.2.6. Autoanihilare? 38
3. Reconcilierea printr-o dialectică valorizatoare 39
3.1. Avantaje ale axiomaticii din stadiul formalist 39
3.2. Cadrul de referință al judecății valorizatoare 41
3.3. Concluzii la discuția criteriului evolutiv 45

II. FORME LOGICE ALE METODEI AXIOMATICE 47
1. Axiomatica tezială 48
1.1. Axiomatica cu fundament tezial și demonstrații complete 49
1.1.1. Statutul regulilor de substituție în economia formalismului 49
1.1.2. Condiția definițiilor din formalismele deductive 53
1.1.3. Criterii topologice pentru reguli și teze 57
1.1.4. Ilustrația mecanismului deductiv 59
1.2. Stilul curent al axiomaticii teziale 64
1.3. Sistemele de teze fără axiome 69
1.3.1. Calculele axiomatice de tip *N* 72
1.3.2. Calculele axiomatice de tip *L* 76

1.4. Deducția naturală cu demonstrații complete 81
2. Axiomatica inferențială 88
2.1. Modalități de sistematizare a schemelor deductive propoziționale 88
2.1.1. Demonstrația directă 89
2.1.2. Demonstrația condițională 92
2.1.3. Demonstrația indirectă 94
2.2. Axiomatica inferențială de tip $R - R'$ 97
2.3. Axiomatica inferențială de tip $R \times R' - R$ 102
2.4. Derivarea schemelor deductive în condițiile extinderii sistemului de teze 104
3. Recapitulare tipologică 107

III. MARGINALII LA DIVERSIFICAREA AXIOMATICII . . . 113
1. Ierarhizarea intra-teoretică și rol explicativ sporit 113
2. Constructivism și standardizare 118
2.1. Sensurile demersului fundațional realizat prin deducția naturală: deductiv propriu-zis și reductiv 118
2.2. Caracterul reductiv al metodei „tabelelor semantice" (Beth) 120
2.3. Adaptarea abducției prin tabele semantice la domeniul secvențelor 125
2.4. Decizia prin demonstrație și automatizarea demersului fundațional 127
3. Generalizare metodologică și unificare teleologică 137

Încheiere: DINCOLO DE AXIOMATICĂ 146
Résumé 150
Note 161
Vocabular simbolic 191
Sommaire 193

517.12(04)=19
BIBLIOTECA UNIVERSITARA
IAȘI
215/1980 20cm L. 6,25

Redactor: OCTAVIAN COMĂNESCU
Tehnoredactor: CONSTANTIN IORDACHE

Coli de tipar 12,25. Bun de tipar: 6.III.1980.

c. 1959 I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23—25
București

01264 DEP. LEGAL

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lei 6,25